ДЖ. КАСТИ, Р. КАЛАБА

МЕТОДЫ ПОГРУЖЕНИЯ В ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTATION

IMBEDDING METHODS IN APPLIED MATHEMATICS

John Casti

University of Arizona

Robert Kalaba

University of Southern California

1973

ADDISON — WESLEY PUBLISHING COMPANY

ADVANCED BOOK PROGRAM

READING, MASSACHUSETTS

London · Amsterdam · Don Mills, Ontario · Sydney · Tokyo

Дж. Касти, Р. Калаба

МЕТОДЫ ПОГРУЖЕНИЯ В ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Перевод с английского
С. П. ЧЕБОТАРЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1976

УДК 517.9 + 681.1422

Монография посвящена численным методам решения широкого класса задач, возникающих в различных областях науки и техники. Авторы разрабатывают алгоритмы решения краевых задач путем сведения их к задачам Коши. С этой целью они используют известный метод инвариантного погружения. Исследуются системы линейных и нелинейных уравнений, уравнения Фредгольма, задачи вариационного исчисления, аналитической механики, теории фильтрации и др.

Книга предназначена для математиков-прикладников, вычислителей, механиков, физиков, занятых решением конкретных практических задач. Она доступна аспирантам и студентам.

Редакция литературы по математическим наукам

К $\frac{20204-020}{041(01)-76}$ 20—76

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА СЕРИИ[1])

Быстродействие современных цифровых вычислительных машин измеряется наносекундами. Эти машины позволяют с высокой точностью и достаточно быстро решать системы из сотен обыкновенных дифференциальных уравнений. Что же дают эти воистину грандиозные возможности для решения научных, технических, экономических и социальных задач, которые встают ныне перед человечеством? Естественно, что для ответа на этот вопрос сейчас прилагаются огромные усилия.

В некоторых областях пока еще невозможно адекватно описать изучаемые процессы на языке математических уравнений. Здесь машину можно использовать лишь для моделирования процесса и, быть может, для оценки эффективности той или иной стратегии управления. В других областях математическое описание построить можно, но полученные уравнения с трудом поддаются численному решению. Возникающие при этом трудности иногда можно преодолеть непосредственно, а если это не удается, можно попытаться переформулировать исходную задачу так, чтобы она лучше согласовывалась с возможностями машины. Математика постоянно стимулируется такого рода деятельностью и, с другой стороны, сама стимулирует развитие вычислительной техники.

---

[1]) Имеется в виду серия «Applied mathematics and computation», в которую входит эта книга. — *Прим. перев.*

Каждое возрастание порядка быстродействия и размеров памяти вычислительных машин требует ревизии существующих численных методов и изучения новых классов задач, для которых появилась надежда на решение.

В книгах этой серии будут отражены современные взгляды на постановки задач, методы их анализа и численные схемы их решения.

Лос-Анджелес, Калифорния *Роберт Калаба*
Апрель, 1973

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

После выхода в свет в 1973 г. английского издания этой книги появилось много книг и статей, в которых развиваются темы, лишь затронутые в нашей работе. Можно отметить, в частности, обширные исследования по проблеме собственных значений дифференциальных и интегральных операторов, разнообразные приложения к механике сплошных сред и распространение общих идей погружения на дифференциальные операторы с частными производными. Инвариантное погружение все чаще используется в работах прикладного характера. Все это подтверждает наше давнее мнение о том, что теория инвариантного погружения нашла лишь первые применения и что в дальнейшем она послужит средством анализа великого множества математических, физических и технических задач.

Нам особенно приятно, что между выходом в свет оригинала и появлением русского перевода прошло совсем немного времени. Очень многие из самых существенных идей теории инвариантного погружения возникли в работах советских ученых и было бы более естественно, если бы оригиналом служила книга на русском языке, а перевод делался на английский. Мы отмечаем в связи с этим лишь работы В. А. Амбарцумяна и В. В. Соболева в области астрофизики, хотя крупный вклад внесли и многие другие советские ученые. Мы надеемся, что, прочитав эту книгу, советский читатель

не только познакомится с многочисленными приложениями теории инвариантного погружения (помимо задач распространения излучения), но и глубже проникнет в основные ее идеи и методы.

Мы считаем своим приятным долгом поблагодарить наших советских коллег Р. В. Гамкрелидзе, по инициативе которого книга была принята к переводу, и С. П. Чеботарева за нелегкую работу по ее переводу. Без их настойчивых усилий она, вероятно, так и осталась бы лишь на английском языке.

Апрель 1975

Лаксенбург, Австрия — *Джон Касти*
Лос-Анджелес, Калифорния — *Роберт Калаба*

ПРЕДИСЛОВИЕ

По выражению фон Неймана «математические идеи рождаются из эмпирики»[1]). Под влиянием окружающего мира возникают различные математические модели действительности и появляются новые теории. Эти теории, разрастаясь и вливаясь в главный поток математической мысли, позволяют объединить на общей основе значительные классы математических задач и дать ответы на ряд вопросов, которые ранее и не ставились. Математическую теорию от набора конкретных методов отличают два основных признака: универсальность и ясность идей и понятий.

Одним из наиболее эффективных стимулов возникновения новых теорий на всем пути развития математики была необходимость получения численных ответов на численно поставленные вопросы. Можно смело сказать, что большая часть того, что сейчас называют классической прикладной математикой, обязана своим появлением желанию избавиться от трудоемких вычислений. Теперь с ростом возможностей вычислительных машин центр тяжести переместился: основное внимание уделяется не полному освобождению от арифметических расчетов, а поискам наиболее эффективных и удобных способов их проведения.

---

[1]) В оригинале: «Mathematical ideas originate in empirics», см. Collected works of von Neumann, vol. 1, p. 9. — *Прим. перев.*

Исходная идея этой книги состоит в том, что вычислительные машины по самой природе являются наиболее эффективным средством для решения дифференциальных уравнений, начальные условия которых заданы в одной точке, т. е. так называемых «задач Коши»[1]). С другой стороны, многие задачи, возникающие в математической физике, технике, биологии, экономике и исследовании операций, по своей природе являются граничными задачами, поскольку необходимые для однозначного определения решения условия задаются в двух или более точках. Но надо сказать, что цифровые вычислительные машины, вообще говоря, не слишком хорошо приспособлены для численного решения таких задач. Основная мысль, развиваемая в этой книге, состоит в следующем: формулируя математически какую-либо задачу, следует учитывать имеющиеся вычислительные средства, ибо часто существуют иные эквивалентные формулировки задачи, которые в вычислительном отношении выгодно отличаются от начальной. Очень часто традиционная математическая формулировка задачи принимается как единственно возможная, будто бы она предложена неким математическим Соломоном, мудрость, рассудительность и способность предвидения которого не вызывают сомнений.

Развивая одну математическую идею, возникшую при изучении распространения излучения в атмосфере, мы стараемся показать, как можно воспользоваться первыми плодами математической теории инвариантного погружения для переформулировки широкого класса граничных

---

[1]) Авторы пользуются терминами «initial value problem», «Cauchy problem» или «Cauchy sistem» для обозначения такого типа задач. При переводе использован принятый в отечественной литературе термин «задача Коши» как в непрерывном, так и в дискретном случаях. — *Прим. перев.*

задач в виде задач Коши. Наша основная задача — пополнить арсенал ученого еще одним мощным средством решения важных задач, возникающих в области его деятельности, но, кроме этого, мы приводим также ряд идей, которые, вероятно, могут сформироваться в одно из ведущих направлений современной прикладной математики.

Чтобы сделать книгу доступной наиболее широкому кругу читателей, мы намеренно предпочли строгому изложению изложение математически формальное. Хотя «пуристы» от математики, вероятно, неодобрительно отнесутся к этому решению, мы считаем, что при таком изложении, иллюстрированном разнообразными примерами, основные идеи видны лучше, чем при строгом изложении, обремененном искусственными математическими препонами. Разумеется, для обоснования рассматриваемых методов под них необходимо подвести строгую математическую базу. Тем не менее, мы решили привести только наиболее важные теоремы, оставив многое для следующей книги. Надеемся, что это решение не только сделает книгу более доступной, но и стимулирует дальнейшие теоретические исследования: нам кажется, что если придерживаться чуть более строгой манеры изложения, то на эту тему можно написать множество журнальных статей, книг и диссертаций. Во всяком случае большинство приведенных в книге рассуждений будет без труда воспринято читателем, знакомым с начальным курсом по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Перейдем теперь к краткому описанию содержания отдельных глав книги.

В первой главе на примере конечно-разностных уравнений вводятся те основные идеи, которые будут использоваться в дальнейшем. Мы приводим краткий анализ «задачи о разорении игрока», излагаем ее нетра-

диционную постановку и метод решения и показываем, что новая постановка обладает определенными вычислительными (и аналитическими) преимуществами перед обычной. Далее, основываясь на разобранном примере, мы применяем эти идеи для решения неоднородной системы линейных разностных уравнений общего вида.

Чтобы сделать изложение независимым, в гл. 2 мы приводим краткий обзор идей и методов численного решения задач Коши. Здесь же рассматриваются стандартные схемы численного интегрирования типа методов Рунге — Кутта и Адамса — Мултона, а также вопросы численной устойчивости.

Изложение основных результатов начинается в гл. 3, где исследуются линейные и нелинейные двухточечные граничные задачи. Мы показываем, что широкий класс таких задач можно переформулировать в виде задач Коши, и, кроме того, излагаем некоторые результаты, полезные для вычисления функции Грина. На конкретном примере кратко рассматривается вопрос численной устойчивости предлагаемого метода, а также приводятся результаты нескольких численных экспериментов, поставленных для его подтверждения.

Четвертая глава посвящена интегральным уравнениям Фредгольма. В основном мы рассматриваем уравнения с ядрами $k(t, y)$, удовлетворяющими условию $k(t, y) = k(|t-y|)$. Мы ограничились этим классом задач, поскольку такие уравнения очень часто возникают во многих областях физики, астрономии, техники и биологии, а, кроме того, можно ожидать, что специальный вид ядра позволит получить более глубокие результаты, чем в общем случае. В конце главы приводятся ссылки на работы, содержащие аналогичные исследования для случаев вырожденных и полувырожденных ядер более общего вида.

Вариационные задачи и задачи оптимального управления являются объектом исследований пятой главы. Показано, как можно изучать широкие классы задач безусловной оптимизации и оптимизации с ограничениями, не пользуясь уравнением Эйлера, динамическим программированием или принципом максимума. Однако мы отмечаем (и подтверждаем конкретным примером), что комбинация различных методов может привести к более эффективной вычислительной процедуре, чем каждый из этих методов в отдельности.

Последняя глава посвящена приложениям методов, описанных в предыдущих главах, к различным разделам физики. Показано, что идеи погружения приводят к новым формулировкам и новому подходу к задачам, возникающим в теории распространения излучения, аналитической механике, теории оптимальной фильтрации и теории нелокального взаимодействия волн.

Если взглянуть на ссылки в конце каждой главы, становится ясно, что большая часть изложенных в этой книге результатов получена совместно с другими авторами. Поэтому вполне можно сказать, что книга принадлежит и им. В этой связи мы хотим поблагодарить, в частности, С. Уэно и Х. Кагиваду за полезные обсуждения и сотрудничество по вопросам, связанным с распространением излучения, Р. Сридхара за плодотворные дискуссии по теории фильтрации и оценивания и А. Шумицки за полезные предложения в области интегральных уравнений. Мы крайне признательны Э. Энджелу и М. Джанкоза за критические замечания и предложения по вопросам численного анализа и М. Скотту за помощь в области задач на собственные значения. Особенно мы благодарны Р. Беллману: его влияние ощущается во всем, без его заинтересованности, поддержки и энтузиаз-

ма остались бы в области несбыточных мечтаний как теория инвариантного погружения, так и эта книга.

Кроме того, мы хотим выразить свою благодарность многочисленным машинисткам в РЭНД Корпорейшн, Системз Контрол Инкорпорейтид и Университете Южной Калифорнии за терпеливое печатание и перепечатывание различных разделов этой книги. В частности, мы хотели бы отметить вклад Канды Кюнце, которой удалось собрать воедино разрозненные куски первого варианта рукописи.

Март 1973

Туссон, Аризона — *Джон Касти*
Лос-Анджелес, Калифорния — *Роберт Калаба*

Глава 1
КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Введение

Теория инвариантного погружения заставляет переосмыслить наше понимание того, как следует ставить математические задачи. Формулировка задачи, удовлетворительная для аналитического исследования, может оказаться неудачной с вычислительной точки зрения и наоборот. Одним из примеров является правило Крамера для решения систем линейных алгебраических уравнений. В этой главе мы намереваемся рассмотреть один простой материальный процесс сначала с традиционной точки зрения, а затем с позиций инвариантного погружения. Поступая таким образом, мы сможем выделить существенные черты обоих подходов и сравнить их достоинства и недостатки.

Мы собираемся рассмотреть классическую задачу «о разорении игрока». Несмотря на ее идейную простоту, эта задача обладает всеми качествами, необходимыми для объяснения основных идей инвариантного погружения. Полное понимание этого примера послужит отправной точкой для разбора более сложных примеров, рассматриваемых в последующих главах.

После обсуждения данного процесса мы перейдем к рассмотрению более общей задачи применения инвариантного погружения к системам линейных разностных уравнений. Помимо того, что этот пример представляет и собственный интерес, он послужит моделью для разбора в гл. 2 двухточечной граничной задачи.

2. Задача «о разорении игрока»

Рассмотрим игрока, обладающего конечным капиталом k. Предположим, что он участвует в игре, где имеется вероятность $p(k)$ увеличения его капитала до $k+1$

и вероятность $q(k) = 1 - p(k)$ сокращения его до $k-1$. Кроме того, предположим, что он согласен делать ставки до тех пор, пока он либо накопит капитал N, либо потеряет все свои деньги. Вопрос состоит в следующем: какова вероятность того, что при заданных вероятностях $\{p(k)\}$, $k=1,2,\ldots, N-1$, игрок достигнет своей цели прежде, чем разорится? Читатель, вероятно, узнает в этой задаче неоднородный вариант классической задачи о разорении игрока, в которой $\{p(k)\}$ постоянны.

3. Классическая формулировка

Обычная формулировка задачи о разорении игрока начинается с введения функции $u(k)$, определенной так:

$u(k, N) =$ вероятность того, что игрок, начиная с капиталом k, накопит капитал N прежде, чем разорится.

Переводя словесное описание задачи на язык математических уравнений, получим для функции u следующее разностное уравнение:

$$u(k, N) = p(k)\,u(k+1, N) + q(k)\,u(k-1, N),$$
$$k = 1, 2, \ldots, N-1, \quad N \geqslant 2. \qquad (1)$$

Условия при $k=0$ и $k=N$ имеют вид

$$u(0, N) = 0, \qquad (2)$$

$$u(N, N) = 1 \qquad (3)$$

и отражают тот факт, что без начального капитала игрок не может играть, а если он имеет капитал N, то тем самым он уже достиг цели. Мы пользуемся обозначением $u(k, N)$ для того, чтобы явно подчеркнуть, что u зависит от того, какой капитал игрок хочет накопить за время игры.

Несмотря на то, что уравнение (1) имеет вид простого линейного разностного уравнения второго порядка, оно при непостоянных p и q не имеет явного решения. Поэтому в данном случае приходится обращаться к численным методам. Видно, что если начальные условия заданы в двух соседних точках $k=n, n-1$, $n=1,2,\ldots, N$, то использовав их, с помощью уравнения (1) можно лег-

ко получить последовательные значения функции $u(k)$. Это как раз тот тип вычислений, для которого прекрасно приспособлены цифровые вычислительные машины. К сожалению, условия (2) и (3) заданы не столь удобным образом, так как определены для двух разнесенных точек $k=0$ и $k=N$. Результатом такого «двухточечного» задания начальных условий является то, что ни один из обычных итеративных методов не может быть применен для решения этой задачи. Покажем теперь, как иной подход к данной задаче позволяет обойти эти аналитические и вычислительные препятствия.

4. Подход на основе инвариантного погружения

Рассмотрим аналогичный процесс, отличающийся от описанного выше лишь тем, что на этот раз игрок стремится достигнуть капитала $N+1$ к концу игры. Соответствующая граничная задача теперь имеет вид

$$u(k, N+1) = p(k)\,u(k+1, N+1) + q(k)\,u(k-1, N+1), \quad k=1, 2, \dots, N, \tag{1}$$

$$u(0, N+1) = 0, \tag{2}$$

$$u(N+1, N+1) = 1. \tag{3}$$

Мы хотим установить связь между двумя задачами (3.1) — (3.3) и (1) — (3). Прежде всего отметим, что для того, чтобы получить капитал $N+1$, игрок раньше должен получить капитал N, не разорившись. Это замечание приводит к математическому соотношению

$$u(k, N+1) = u(k, N)\,u(N, N+1), \quad N \geqslant k. \tag{4}$$

Для того чтобы можно было использовать соотношение (4), нам необходимо получить выражение для $u(N, N+1)$. Подставляя $k=N$ в (1), получим

$$u(N, N+1) = p(N)\,u(N+1, N+1) + q(N)\,u(N-1, N+1), \tag{5}$$

откуда, учитывая (3), имеем

$$u(N, N+1) = p(N) + q(N)\,u(N-1, N+1). \tag{6}$$

Рассуждая, как и выше, приходим к уравнению

$$u(N-1,\ N+1)=u(N-1,\ N)\,u(N,N+1). \qquad (7)$$

Вводя функцию r, определенную формулой

$$r(N)=u(N,\ N+1),\quad N\geqslant 0, \qquad (8)$$

перепишем уравнение (6) в виде

$$r(N)=p(N)+q(N)\,[r(N-1)\,r(N)]. \qquad (9)$$

Разрешая (9) относительно $r\ (N)$, получим уравнение

$$r(N)=\frac{p(N)}{1-q(N)\,r(N-1)},\quad N=1,\ 2,\dots, \qquad (10)$$

с начальным условием (при $N=0$) вида

$$r(0)=0. \qquad (11)$$

Условие (11) отражает тот факт, что, не имея начального капитала, игрок не имеет никаких шансов достигнуть своей цели.

Возвращаясь к уравнению (4), теперь можно записать

$$u(k,N+1)=u(k,N)\,r\,(N),\quad N\geqslant k, \qquad (12)$$

где функция r определяется уравнениями (10) — (11). Начальное условие для u имеет вид

$$u(k,\ k)=1. \qquad (13)$$

Заметим, что уравнения (10) — (13) для u и r определяют задачу Коши в отличие от двухточечной граничной задачи, к которой мы приходим при классической формулировке. Следовательно, для вычислительных целей нелинейная задача, поставленная в терминах инвариантного погружения, может оказаться предпочтительней классической линейной задачи.

Вычислительная процедура определения функции $u\,(k,N)$ для любого фиксированного $k,\ 0<k<N$, состоит в следующем: из уравнений (10) — (11) найти $r\ (1),\dots,\ r\ (k)$. При $N=k$ перейти к уравнению (12) с начальным условием $u(k,k)=1$. Для $N>k$ продолжить вычисление функции r и из уравнения (12) определить $u\ (k,N+1)$. Процесс прекращается, когда N

достигает желаемого значения, скажем N_0. На этом этапе имеется число $u(k, N_0)$, представляющее собой вероятность того, что игрок с начальным капиталом k накопит капитал N_0 прежде, чем разорится. Заметим, что решение для любого k получается в результате присоединения нового уравнения типа (12), когда N достигает желаемого значения капитала k.

5. Стандартный пример

Чтобы показать, что решение, полученное с помощью инвариантного погружения полностью согласуется с выводами классической теории, рассмотрим случай постоянных p и q. В этом случае явное решение линейной граничной задачи (3.1) — (3.3) имеет вид

$$u(k, N) = 1 - \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}, \quad p \neq q, \tag{1}$$

$$u(k, N) = \frac{k}{N}, \quad p = q, \quad k \leqslant N. \tag{2}$$

Покажем, что функции r и u из уравнений (4.10) — (4.13) удовлетворяют уравнению (2), оставляя более общий случай читателю.

Для этого нам следует показать, что

$$u(N, N+1) = \frac{p}{1 - qu(N-1, N)} \tag{3}$$

и

$$u(0, 1) = 0. \tag{4}$$

Очевидно, что (4) выполняется в силу (2). Чтобы получить (3), запишем

$$\frac{p}{1 - qu(N-1, N)} = \frac{p}{1 - q \cdot \frac{N-1}{N}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{N-1}{N}} = \frac{N}{N+1} = u(N, N+1). \tag{5}$$

Для вывода (4.12) и (4.13) заметим, что из уравнения (2) следует

$$u(k,\ k)=1, \quad k=0, 1, \dots, N, \tag{6}$$

что совпадает с уравнением (4.13). Далее,

$$u(k, N)\, r(N)=\frac{kN}{N\,(N+1)}=\frac{k}{N+1}=u(k, N+1).$$

Таким образом, и уравнение (4.12) получено.

6. Линейные разностные уравнения

Введя на этом простом примере наши основные идеи, рассмотрим теперь эту проблему с чисто математической точки зрения, оставив в стороне все физические модели.

Рассмотрим однородную систему линейных разностных уравнений

$$u_{n+1}=Au_n+Bv_n, \quad u_0=0, \tag{1}$$

$$v_{n+1}=Cu_n+Dv_n, \quad v_N=1,\ n=1, 2, \dots,\ N-1. \tag{2}$$

Обычный метод преобразования этой граничной задачи в задачу Коши состоит в фиксации длины интервала N. Затем можно записать

$$u_n=\rho_n v_n, \quad n=0, 1, \dots, N, \tag{3}$$

и

$$\rho_{n+1}v_{n+1}=A\rho_n v_n+Bv_n, \tag{4}$$

$$\rho_{n+1}\,[C\rho_n v_n+Dv_n]=A\rho_n v_n+Bv_n. \tag{5}$$

Разрешая систему (4) — (5) относительно ρ_{n+1}, получим дробно-линейное рекуррентное соотношение

$$\rho_{n+1}=\frac{A\rho_n+B}{C\rho_n+D}, \quad n=0, 1, \dots, N-1, \tag{6}$$

с начальным условием

$$\rho_0=0. \tag{7}$$

С помощью уравнений (6) и (7) легко определить всю последовательность $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_N$. В частности, так опре-

деляется граничное условие для ρ_N. Предполагая, что $AD \neq BC$, можно найти переменные u_{N-1}, v_{N-1} как решения системы линейных алгебраических уравнений

$$u_N = Au_{N-1} + Bv_{N-1}, \tag{8}$$

$$v_N = Cu_{N-1} + Dv_{N-1}. \tag{9}$$

Далее по известным u_{N-1} и v_{N-1} определяются u_{N-2} и v_{N-2} и т. д.

Таким образом, этот классический подход является двухшаговым методом. При этом на первом шаге определяется последовательность $\{\rho_n\}$, а на втором — последовательность пар $\{(u_n, v_n)\}$.

7. Инвариантное погружение

Подход на основе инвариантного погружения к решению задачи (6.1) — (6.2) принципиально отличается от изложенного выше. Здесь параметр N варьируется в то время, как n остается постоянным. Как мы увидим в дальнейшем, такой подход к решению позволяет одновременно обойтись и без граничных задач, и без двухшаговых методов.

Поскольку решение системы (6.1) — (6.2) зависит как от n, так и от N, введем обозначения, которые отражали бы этот факт. Запишем граничную задачу в виде

$$u(n+1, N) = Au(n, N) + Bv(n, N), \quad u(0, N) = 0, \tag{1}$$

$$v(n+1, N) = Cu(n, N) + Dv(n, N), \quad v(N, N) = 1,$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots, N-1. \tag{2}$$

Рассмотрим соответствующую задачу на интервале длины $N+1$:

$$u(n+1, N+1) = Au(n, N+1) + Bv(n, N+1),$$
$$u(0, N+1) = 0, \tag{3}$$

$$v(n+1, N+1) = Cu(n, N+1) + Dv(n, N+1),$$
$$v(N+1, N+1) = 1. \tag{4}$$

Система уравнений (3) — (4) отличается от системы (6.1) и (6.2) лишь тем, что теперь граничное условие на v есть $v(N, N+1)$, а не 1. Таким образом, предполагая, что линейные задачи (1) — (2) и (3) — (4) обладают единственными решениями, мы получаем, что эти решения связаны уравнениями

$$u(n, N+1) = v(N, N+1)\, u(n, N), \tag{5}$$

$$v(n, N+1) = v(N, N+1)\, v(n, N), \quad N \geqslant n. \tag{6}$$

Для того чтобы можно было использовать эти соотношения, нам необходимо иметь начальные условия для u и v при $N = n$ и более подробную информацию о $v(N, N+1)$ как о функции от N.

Положив в уравнениях (3) и (4) $n = N$, получим

$$r(N+1) = Au(N, N+1) + Bv(N, N+1), \tag{7}$$

$$1 = Cu(N, N+1) + Dv(N, N+1), \tag{8}$$

где

$$r(N) = u(N, N), \quad N = 0, 1, 2, \ldots . \tag{9}$$

Предполагая, что $\Delta = AD - BC \neq 0$, решение системы уравнений (7), (8) можно записать в виде

$$u(N, N+1) = \frac{Dr(N+1) - B}{\Delta}; \tag{10}$$

$$v(N, N+1) = \frac{A - Cr(N+1)}{\Delta}, \quad N = 0, 1, 2, \ldots . \tag{11}$$

Выведем теперь рекуррентные соотношения для определения последовательности $\{r(N)\}$. Подставив в (5) $n = N$, с помощью уравнений (9) — (11) получим

$$\frac{Dr(N+1) - B}{\Delta} = \frac{A - Cr(N+1)}{\Delta}\, r(N). \tag{12}$$

Разрешая это уравнение относительно $r(N+1)$, получим рекуррентное соотношение

$$r(N+1) = \frac{Ar(N) + B}{Cr(N) + D}, \qquad N = 0, 1, 2, \ldots . \tag{13}$$

Начальное условие при $N = 0$ имеет вид

$$r(0) = 0. \tag{14}$$

Сравнивая задачи Коши для последовательностей $\{r(i)\}$, мы видим, что

$$\rho_i = r(i), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots . \tag{15}$$

До сих пор методы перекрываются. Однако основные соотношения и идеи методов различны.

8. Задача Коши

Сформулируем теперь одношаговый метод инвариантного погружения для решения уравнений (6.1) и (6.2). Предположим, что мы хотим получить решение для фиксированного положительного n. Используя начальное условие

$$r(0) = 0 \tag{1}$$

и рекуррентное соотношение

$$r(N+1) = \frac{Ar(N) + B}{Cr(N) + D}, \tag{2}$$

определим последовательность $r(1), r(2), \ldots r(n)$. Далее, решим систему рекуррентных уравнений

$$u(n, N+1) = \frac{A - Cr(n+1)}{\Delta} u(n, N), \tag{3}$$

$$v(n, N+1) = \frac{A - Cr(n+1)}{\Delta} v(n, N), \quad n \geqslant N, \tag{4}$$

где в качестве начальных условий при $N = n$ используются соотношения

$$u(n, n) = r(n), \tag{5}$$

$$v(n, n) = 1. \tag{6}$$

При этом, поскольку $r(n)$ уже вычислено, эти условия фактически заданы. Таким образом и определяются тройки чисел $[r(n+1),\ u(n, n+1),\ v(n, n+1)], \ldots$.

9. Неоднородный случай

Рассмотрим неоднородную систему линейных разностных уравнений

$$x(n+1, N) = Ax(n, N) + By(n, N) + f(n), \quad (1)$$

$$y(n+1, N) = Cx(n, N) + Dy(n, N) + g(n),$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, N-1, \quad (2)$$

с неоднородными граничными условиями

$$x(0, N) = 0, \quad (3)$$

$$y(N, N) = 1. \quad (4)$$

Решение этой системы можно записать в виде

$$x(n, N) = p(n, N) + u(n, N), \quad (5)$$

$$y(n, N) = q(n, N) + v(n, N), \quad 0 \leqslant n \leqslant N. \quad (6)$$

При этом функции $p(n, N)$ и $q(n, N)$ удовлетворяют неоднородной системе разностных уравнений

$$p(n+1, N) = Ap(n, N) + Bq(n, N) + f(n), \quad (7)$$

$$q(n+1, N) = Cp(n, N) + Dq(n, N) + g(n),$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, N-1, \quad (8)$$

с однородными граничными условиями

$$p(0, N) = 0, \quad (9)$$

$$q(N, N) = 0. \quad (10)$$

Поскольку мы уже показали, что функции $u(n, N)$ и $v(n, N)$ при $N \geqslant n$ можно определить, решив задачу Коши, нам остается лишь определить функции $p(n, N)$ и $q(n, N)$, $N \geqslant n$.

Рассмотрим соответствующую задачу на интервале длины $N+1$. Система уравнений теперь имеет вид

$$p(n+1, N+1) = Ap(n, N+1) + Bq(n, N+1) + f(n), \quad (11)$$

$$q(n+1,\ N+1) = Cp(n,\ N+1) + Dq(n,\ N+1) + g(n),$$
$$0 \leqslant n \leqslant N, \quad (12)$$
$$p(0,\ N+1) = 0, \quad (13)$$
$$q(N+1,\ N+1) = 0. \quad (14)$$

Разности $p(n,\ N+1) - p(n,\ N)$ и $q(n,\ N+1) - q(n,\ N)$ удовлетворяют однородной системе разностных уравнений при $0 \leqslant n \leqslant N$. При $n=0$ первая разность равна нулю, а при $n=N$ вторая разность равна $q(N,\ N+1)$. Поэтому

$$p(n,\ N+1) - p(n,\ N) = q(N,\ N+1)\, u(n,\ N), \quad (15)$$
$$q(n,\ N+1) - q(n,\ N) = q(N,\ N+1)\, v(n,\ N),$$
$$0 \leqslant n \leqslant N. \quad (16)$$

Таким образом, мы получили основные рекуррентные соотношения для определения функций p и q при $N \geqslant n$. Поскольку уже известно, что функции u и v являются решением некоторой задачи Коши, мы лишь должны найти множители $q(N,\ N+1)$, $N = 0, 1, 2, \ldots$.

Положим $p = N$ в уравнениях (11) и (12). Тогда

$$S(N+1) = Ap(N,\ N+1) + Bq(N,\ N+1) + f(N) \quad (17)$$

и

$$0 = Cp(N,\ N+1) + Dq(N,\ N+1) + g(N), \quad (18)$$

где

$$S(N) = p(N,\ N). \quad (19)$$

Решение системы (17) — (18) имеет вид

$$p(N,\ N+1) = \frac{D[S(N+1) - f(N)] + Bg(N)}{\Delta}, \quad (20)$$

$$q(N,\ N+1) = \frac{-Ag(N) - C[S(N+1) - f(N)]}{\Delta}. \quad (21)$$

Положив в уравнении (15) $n = N$, получим

$$p(N,\ N+1) - p(N,\ N) = q(N,\ N+1)\, u(N,\ N). \quad (22)$$

Последнее соотношение можно переписать в виде

$$\frac{D[S(N+1)-f(N)]+Bg(N)}{\Delta}-S(N)=$$

$$=\frac{-Ag(N)-C[S(N+1)-f(N)]}{\Delta}r(N). \qquad (23)$$

Разрешив это уравнение относительно $S(N+1)$, получим желаемое рекуррентное соотношение

$$[D+Cr(N)]S(N+1)=-[B+Ar(N)]g(N)+$$
$$+Cf(N)r(N)+S(N), \quad N=0, 1, 2, \dots . \qquad (24)$$

Учитывая определение (19), начальное условие для функции S при $N=0$ можно записать как

$$S(0)=0. \qquad (25)$$

Таким образом, функция S определяется уравнениями (25) и (24). Тогда функция $q(N, N+1)$ определяется из соотношения (21). Наконец, функции p и q определяются из уравнений (15) и (16) для $N \geqslant n$ с начальными условиями при $N=n$

$$p(n, n)=S(n), \qquad (26)$$

$$q(n, n)=0. \qquad (27)$$

Замечания и литература

§ 2—3. Элементарное, но достаточно подробное обсуждение «задачи о разорении игрока» и ее связи с уравнением диффузии приведено в книге

Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, том I, 2-е изд., изд-во «Мир», 1964.

Более строгое изложение проблемы можно найти в книгах

Спитцер (Spitzer F.), Principles of random walk, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1964,

или

Чанг (Chung K.), A course in probability theory, Harcourt, Brace and World, New Vork, 1968.

§ 4. Первым применением инвариантного погружения к задачам случайного блуждания явилась работа

Беллман, Калаба (Bellman R., Kalaba R.), Random walk, scattering, and invariant imbedding — I: One-dimensional discrete case, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **43** (1957), 930 — 933.

Современное изложение вопроса содержится в книге

Беллман (Bellman R.), Invariant imbedding and random walk, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 251 — 254.

§ 6. Элементарное введение в линейные разностные уравнения с различными приложениями к экономике и общественным наукам можно найти в работе

Голдберг (Goldberg S.), Introduction to difference equations, John Wiley, New York, 1958.

Более строгое изложение дано в книге

Миллер (Miller K.), Linear difference equations, W. A. Benjamin Co., New York, 1968.

§ 7 — 9. Здесь мы следуем работе

Калаба (Kalaba R.), A one-sweep method for linear difference equations with two-point boundary conditions, USCEE Rept. 69 — 23, University of Southern California, Los Angeles, 1969.

Многомерные аналоги рассматриваемой здесь задачи часто возникают при решении уравнений с частными производными с помощью конечно-разностных схем. Некоторые задачи такого рода обсуждаются в статье

Энджел, Калаба (Angel E., Kalaba R.), A one-sweep numerical method for vector-matrix difference equations with two-point boundary conditions, *J. Optim. Theory and Appl.*, 7(1971), № 6.

Глава 2
ЗАДАЧИ КОШИ

1. Введение

Для того чтобы не отсылать читателя к дополнительной литературе, в этой главе мы обсудим элементарные аналитические и вычислительные вопросы, связанные с решением задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Основным объектом в наших рассуждениях будет нелинейное одномерное дифференциальное уравнение

$$u'(t) = h(u(t), t), \quad u(0) = c, \tag{1}$$

но иногда мы будем иметь дело и с системами таких уравнений.

Хотя главная цель этой главы состоит в том, чтобы познакомить читателя с основными приемами численного решения задачи Коши, все же обсуждаются и вопросы существования и единственности главным образом для того, чтобы еще раз напомнить, что вычислительные машины только лишь помогают анализу проблемы, но не подменяют его. В последнем разделе этой главы вводятся двухточечные граничные задачи вида

$$u''(t) + a(t)u = 0, \quad u(0) = c_1, \quad u(T) = c_2. \tag{2}$$

При этом указываются основные трудности, возникающие при решении таких задач, обойти которые и позволяют методы, описанные в остальных главах книги.

2. Векторно-матричные обозначения

При исследовании систем дифференциальных уравнений, чем мы и будем заниматься в дальнейшем, мы часто пользуемся векторно-матричными обозначениями, позво-

ляющими обойтись без трудоемкого и бессодержательного выписывания всех уравнений системы.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$\begin{aligned} &\frac{du_1(t)}{dt} = h_1(u_1, u_2, \ldots, u_N, t), \qquad u_1(0) = c_1, \\ &\frac{du_2(t)}{dt} = h_2(u_1, u_2, \ldots, u_N, t), \qquad u_2(0) = c_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad (1) \\ &\frac{du_N(t)}{dt} = h_N(u_1, u_2, \ldots, u_N, t), \quad u_N(0) = c_N. \end{aligned}$$

Введя N-мерные векторы u, c и h как

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} h_1(u_1, u_2, \ldots, u_N, t) \\ h_2(u_1, u_2, \ldots, u_N, t) \\ \ldots\ldots\ldots \\ h_N(u_1, u_2, \ldots, u_N, t) \end{pmatrix},$$

мы видим, что систему (1) можно записать в виде

$$\frac{du}{dt} = h(u, t), \quad u(0) = c, \tag{2}$$

где дифференцирование вектора u определено покомпонентно, т. е.

$$\frac{du}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{du_N}{dt} \end{pmatrix}.$$

В том случае когда система (1) линейна, т. е.

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t)\, u_j(t), \quad u_i(0) = c_i, \ i = 1, 2, \ldots, N, \tag{3}$$

обычно записывают

$$\frac{du}{dt} = A(t)u, \quad u(0) = c, \tag{4}$$

где u, $\frac{du}{dt}$ и c такие же, как и выше, а $A(t)$ есть $N \times \times N$-матрица,

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) \dots a_{1N}(t) \\ \dots\dots\dots \\ a_{N1}(t) \dots a_{NN}(t) \end{pmatrix}.$$

3. Существование и единственность

Прежде, чем отправиться в краткое путешествие в область численного анализа, остановимся на минуту на двух важнейших аналитических вопросах — существовании и единственности решения задачи Коши. Разумно предположить, что прежде, чем мы попытаемся получить численное решение некоторого дифференциального уравнения, желательно знать, имеет ли данное уравнение решение и единственно ли оно, поскольку в случае отсутствия решения любые полученные в результате счета числа бессодержательны, а в случае неединственности решения следует определить, какое же решение выдает вычислительная машина. (Занятно отметить тот удивительный факт, что, как ни странно, многие инженеры и физики попросту отмахиваются от вопросов существования и единственности решения, полагая, что они волнуют лишь математиков. В действительности математики в меньшей степени, чем инженеры, заинтересованы в гарантиях существования и единственности решения, поскольку если инженер выписывает математическое уравнение, которое предполагается разумным приближением реального физического процесса, то, чтобы это уравнение в какой-то мере отражало действительность, оно должно иметь единственное решение. С другой стороны, для математика в равной мере интересна как ситуация, когда решение существует и единственно, так и тот случай, когда это не так.

Рассмотрим теперь следующую задачу Коши:

$$\frac{dz}{dt} = h(z, t), \quad z(0) = c, \tag{1}$$

где z, h и c суть n-мерные векторы. Пусть R — область в R^n, заданная формулой $\| z - c \| \leqslant k_1$, и пусть $k_2 = \max \| h(z, t) \|$ по всем $z \in R$. Имеет место следующая теорема.

Теорема существования и единственности. *Если $h(z, t)$ — непрерывная функция от z в R и если для любых двух векторов x и y из R существует постоянная k_3, не зависящая от x и y и такая, что*

$$\| h(x, t) - h(y, t) \| \leqslant k_3 \| x - y \|, \tag{2}$$

то уравнение (1) обладает единственным решением при всех $0 \leqslant t < k_1/k_2$.

Доказательство этой теоремы проводится непосредственно, и его можно найти в литературе, список которой приведен в конце главы. Следует отметить, что условие типа (2) называется условием Липшица, и легко показать, что из него следует непрерывность. Для выполнения этого условия достаточно того, чтобы частные производные функции $h(z, t)$ по z_i были равномерно ограничены в R.

4. Численное решение задачи Коши

Рассмотрим теперь вопрос получения численного решения задачи Коши на цифровой вычислительной машине. Допустим, мы собираемся решить скалярное уравнение

$$\frac{du}{dt} = h(u, t), \quad u(0) = c. \tag{1}$$

Поскольку цифровая вычислительная машина способна выполнять лишь арифметические операции сложения, вычитания, умножения и деления, наша первая задача состоит в сведении трансцедентной операции дифференци-

рования к арифметическим. Весьма простой и далеко не самый эффективный способ состоит в аппроксимации уравнения (1) конечно-разностной схемой

$$u(t+\Delta) \cong u(t) + h(u, t)\Delta, \quad u(0) = c, \tag{2}$$

где Δ — «малый» параметр. Знание начального значения $u(0) = c$ позволяет с помощью уравнения (2) последовательно вычислять значения $u(\Delta)$, $u(2\Delta), \ldots$, а это как раз та задача, для решения которой ЭЦВМ идеально приспособлена.

Как обычно бывает в случае замены точного соотношения приближенным, здесь необходимо исследовать вопрос о точности аппроксимации. Разлагая, например, левую часть (2) по степеням Δ, получим

$$u(t+\Delta) = u(t) + \Delta u'(t) + \frac{\Delta^2}{2} u''(t) + \ldots . \tag{3}$$

Следовательно, мы видим, что локальная ошибка при вычислении $u\ (k\Delta)$ с помощью уравнения (2) при заданном $u((k-1)\Delta)$ составляет

$$O(\Delta^2 \mid u''(k-1)\Delta \mid). \tag{4}$$

В качестве примера того, как ценой небольших усилий можно уменьшить ошибку, воспользуемся для аппроксимации производной центральными разностями:

$$u(t+\Delta) \cong u(t-\Delta) + h(u, t)2\Delta, \quad u(0) = c. \tag{5}$$

Разложение $u(t+\Delta)$ и $u(t-\Delta)$ по степеням Δ в точке t дает локальную ошибку

$$O(\Delta^3 \mid u'''(t) \mid), \tag{6}$$

которая на порядок меньше, чем (4).

Аппроксимация типа (2) восходит еще к Эйлеру и обычно называется методом Эйлера. На рис. 1 приведена графическая иллюстрация этого метода. Сначала вычисляется наклон функции u в начальной точке $(0, c)$, затем он используется для аппроксимации функции от-

резком прямой до точки $(\Delta,\ c + h(c, 0)\,\Delta)$. Далее процесс повторяется в новой точке для получения следующей и т.д. Полученная в результате ломаная и является приближением функции $u(t)$.

Для улучшения оценки ошибки метода Эйлера необходимо использовать более тонкие рекуррентные соотношения. К наиболее популярным сейчас методам

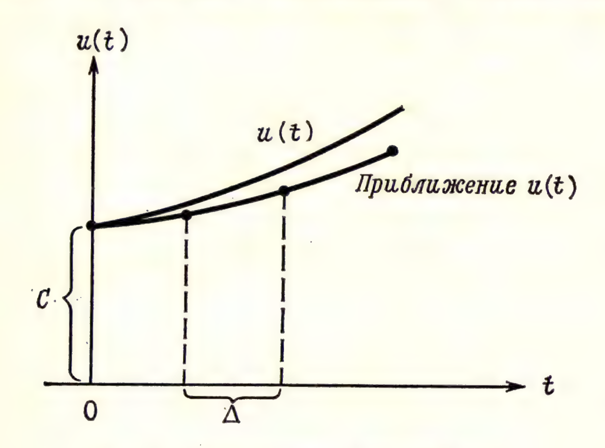


Рис. 1. Иллюстрация метода Эйлера.

относятся различные процедуры типа схемы Рунге — Кутта. Характерной чертой этих методов является то, что интервал $(t,\ t + \Delta)$ разбивается на ряд подинтервалов. При этом, используя соответствующий выбор точек, в которых вычисляются значения функции $h\ (u,\ t)$, можно добиться существенно более высокого порядка ошибки округления.

Наиболее часто метод Рунге — Кутта используется как процедура четвертого порядка, в которой интервал $(t,\ t + \Delta)$ разбивается на четыре подинтервала. В этом случае схема интегрирования уравнения задается соотношениями

$$k_0 = h\,(u\,(t),\,t)\,\Delta, \tag{7}$$

$$k_1 = h\,(u\,(t) + \beta_{10}\,k_0, t + \alpha_1\,\Delta)\,\Delta, \tag{8}$$

$$k_2 = h(u(t) + \beta_{20}k_0 + \beta_{21}k_1, t + \alpha_2\Delta)\,\Delta, \tag{9}$$

$$k_3 = h(u(t) + \beta_{30}k_0 + \beta_{31}k_1 + \beta_{32}k_2, t + \alpha_3\Delta)\,\Delta, \tag{10}$$

$$u(t+\Delta) = u(t) + (ak_0 + bk_1 + ck_2 + dk_3). \tag{11}$$

Значения некоторых параметров, входящих в соотношения (7) — (11), можно определить, приравнивая выражение для $u(t+\Delta)$ разложению $u(t+\Delta)$ в ряд Тейлора в точке t. Приравнивая члены соответствующих степеней до четвертого порядка включительно, получаем ошибку округления $O(\Delta^5)$. Среди бесчисленного множества возможных вариантов выбора параметров приведем один, первоначально предложенный Рунге:

$$k_0 = h(u(t), t)\,\Delta, \tag{12}$$

$$k_1 = h\left(u(t) + \frac{k_0}{2},\quad t + \frac{\Delta}{2}\right)\Delta, \tag{13}$$

$$k_2 = h\left(u(t) + \frac{k_1}{2},\quad t + \frac{\Delta}{2}\right)\Delta, \tag{14}$$

$$k_3 = h(u(t) + k_2,\quad t + \Delta)\,\Delta, \tag{15}$$

$$u(t+\Delta) = u(t) + \frac{1}{6}[k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3]. \tag{16}$$

Функция h сначала вычисляется на левом конце интервала, затем дважды в экстраполированных внутренних точках и, наконец, на экстраполированном правом конце интервала. В процедуре Рунге интервал $(t, t+\Delta)$ подразделяется на четыре подинтервала $\frac{\Delta}{6}$, $\frac{\Delta}{3}$, $\frac{\Delta}{3}$ и $\frac{\Delta}{6}$, которые служат весами значений функции в соответствующих точках.

Метод Рунге — Кутта и метод Эйлера обладают тем общим свойством, что для начала процедуры решения необходимо знать значение функции $u(t)$ лишь в одной точке. Подобные методы иногда называют «пошаговыми» или «открытыми» методами[1]. Основной недостаток мето-

[1] В оригинале «marching» и «open» соответственно. — *Прим. перев.*

дов Рунге — Кутта заключается в том, что в них на каждом шаге интегрирования необходимо несколько раз вычислять значение функции $h(u, t)$. Это увеличивает время, необходимое для получения решения. Главный недостаток метода Эйлера состоит в довольно большой ошибке округления.

Для того чтобы избавиться от недостатков, свойственных методам Эйлера и Рунге — Кутта, необходимо воспользоваться более тонким подходом. В описанных выше методах предполагается, что наклон $u'(t)$ постоянен на интервале $(t, t+\Delta)$, что почти никогда не встречается на практике. Ясно поэтому, что более точной процедурой мог бы быть метод, в котором наклон аппроксимируется набором многочленов, которые используются для *предсказания* значения $u(t+\Delta)$. Получив предсказание для $u(t+\Delta)$, можно с помощью итеративной процедуры, использующей значение $u'(t+\Delta)$, полученное из уравнения (1), *уточнить* его. Такие методы называются методами типа «предсказание-уточнение»[1] и, как мы увидим далее, часто позволяют преодолеть трудности, возникающие при применении метода Эйлера или Рунге—Кутта.

Для получения предсказания проведем интерполяционный многочлен через N известных точек $u'(t)$, $u'(t-\Delta), \ldots, u'(t-(N-1)\Delta)$ и затем продолжим результирующую функцию на весь интервал интегрирования. Для того чтобы начать интегрирование, с помощью какой-либо другой процедуры, скажем метода Рунге — Кутта, необходимо получить первые N точек.

Используя $u'(t)$ в ряде предыдущих точек, мы можем для вычисления $u'(t^*)$ использовать интерполяционную формулу

$$u'(t^*) = u'(t) + \frac{1}{\Delta}(t^*-t)\nabla u'(t) + \frac{1}{2!\,\Delta^2}(t^*-t)(t^*-(t-\Delta))\nabla^2 u'(t) + \frac{1}{3!\,\Delta^3}(t^*-t)(t^*-(t-\Delta))(t^*-(t-2\Delta))\nabla^3 u'(u) + \ldots,$$
$$t < t^* < t+\Delta, \quad (17)$$

[1] В оригинале «predictor-corrector methods». — *Прим. перев.*

где ∇ — оператор обратной разности $\nabla z(t) = z(t) - z(t - \Delta)$. Интегрируя (17) по интервалу $(t, t + \Delta)$, получим формулу Адамса — Бэшфорта

$$u(t+\Delta) = u(t) + \Delta\left[u'(t) + \frac{1}{2}\nabla u'(t) + \frac{5}{12}\nabla^2 u'(t) + \frac{3}{8}\nabla^3 u'(t)\right] + \ldots, \quad (18)$$

Аналогично, интегрируя (17) по интервалу $(t - \Delta, t)$, получаем формулу Адамса — Мултона

$$u(t) = u(t-\Delta) + \Delta\left[u'(t) - \frac{1}{2}\nabla u'(t) - \frac{1}{12}\nabla^2 u'(t) - \frac{1}{24}\nabla^3 u'(t) - \ldots\right], \quad (19)$$

или, заменяя разности их выражениями через $u'(t)$, $u'(t - \Delta)$, ... и заменяя t на $t + \Delta$, получим, сохраняя лишь члены до третьего порядка включительно,

$$u(t+\Delta) = u(t) + \frac{\Delta}{24}[55u'(t) - 59u'(t-\Delta) + 37u'(t-2\Delta) - 9u'(t-3\Delta)]. \quad (20)$$

Проводя интерполяционный многочлен через N точек $u'(t + \Delta)$, $u'(t), \ldots, u'(t - (N-2)\Delta)$, можно получить формулу для итеративного уточнения, использующую значение $u'(t + \Delta)$. Воспользовавшись обратной интерполяционной формулой Грегори — Ньютона (более подробное изложение см. в соответствующей литературе, указанной в конце главы), окончательно получаем

$$u'(z) = u'(t+\Delta) + \nabla u'(t+\Delta)z + \frac{\nabla^2}{2!}u'(t+\Delta)z(z+\Delta) + \frac{\nabla^3}{3!}u'(t+\Delta)z(z+\Delta)(z+2\Delta) + \ldots + \frac{\nabla^N}{N!}u'(t+\Delta)z(z+\Delta)\ldots(z+N\Delta-\Delta), \quad (21)$$

где

$$z = \frac{t^* - (t + \Delta)}{\Delta}, \qquad t \leqslant t^* \leqslant t + \Delta.$$

Интегрирование уравнения (1) с заменой $u'(t)$ на $u'(z)$ по интервалу $(-\Delta, 0)$ дает

$$u(t + \Delta) = u(t) + \Delta\left[u'(t + \Delta) - \frac{1}{2}\nabla u'(t + \Delta) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{12}\nabla^2 u'(t + \Delta) - \dots\right]. \qquad (22)$$

Заменяя конечные разности их определением и сохраняя лишь члены до третьего порядка включительно, получим

$$u(t + \Delta) = u(t) + \frac{\Delta}{24}[9u'(t + \Delta) + 19u'(t) -$$
$$- 5u'(t - \Delta) + u'(t - 2\Delta)]. \qquad (23)$$

Только что выведенная схема Адамса — Мултона как вариант общего метода «предсказание-уточнение» и используется в дальнейшем во всех численных примерах. При этом (20) используется для предсказания, а (23) — — для уточнения. Программа этого метода для ЭЦВМ приведена в приложении.

Оценка локальной ошибки $E(\Delta)$ для схемы интегрирования Адамса — Мултона в предположении, что $u^5(t)$ меняется на интервале $(t - 3\Delta,\ t + \Delta)$ не слишком быстро, дается формулой

$$E(\Delta) = \frac{3}{8}\Delta^5 u^{(5)}(\xi) = O(\Delta^5), \qquad t - 3\Delta \leqslant \xi \leqslant t + \Delta. \qquad (24)$$

Сравнивая эту величину с оценкой ошибки метода Рунге — Кутта, мы видим, что обе имеют порядок $O(\Delta^5)$. Анализируя, однако, выражения (20) и (23), легко видеть, что в методе Адамса — Мултона функция $h(u, t) = u'(t)$ вычисляется только дважды в то время, как в методе Рунге — Кутта на каждом шаге интегрирования требуются четыре значения этой функции. Таким образом, при той же точности процедура Адамса — Мултона приблизительно вдвое быстрее, чем метод Рунге — Кутта.

При этом несколько увеличивается объем необходимой памяти, поскольку необходимо хранить предыдущие точки.

Поскольку дифференциальное уравнение второго или более высокого порядка сводится к системе уравнений первого порядка введением дополнительных переменных, изложенные выше методы можно применять как к одномерным, так и к многомерным задачам. Если, например, для решения системы двух дифференциальных уравнений вида

$$u' = h_1(u, v, t), \quad u(0) = c_1,$$
$$v' = h_2(u, v, t), \quad v(0) = c_2, \tag{25}$$

используется описанный выше метод Рунге — Кутта, то интегрирование проводится по формулам

$$k_0 = h_1(u(t), v(t), t)\Delta, \tag{26}$$

$$n_0 = h_2(u(t), v(t), t)\Delta, \tag{27}$$

$$k_1 = h_1\left(u(t) + \frac{k_0}{2}, \quad v(t) + \frac{n_0}{2}, \quad t + \frac{\Delta}{2}\right)\Delta, \tag{28}$$

$$n_1 = h_2\left(u(t) + \frac{k_0}{2}, \quad v(t) + \frac{n_0}{2}, \quad t + \frac{\Delta}{2}\right)\Delta, \tag{29}$$

$$k_2 = h_1\left(u(t) + \frac{k_1}{2}, \quad v(t) + \frac{n_1}{2}, \quad t + \frac{\Delta}{2}\right)\Delta, \tag{30}$$

$$n_2 = h_2\left(u(t) + \frac{k_1}{2}, \quad v(t) + \frac{n_1}{2}, \quad t + \frac{\Delta}{2}\right)\Delta, \tag{31}$$

$$k_3 = h_1(u(t) + k_2, \quad v(t) + n_2, \quad t + \Delta)\Delta, \tag{32}$$

$$n_3 = h_2(u(t) + k_2, \quad v(t) + n_2, \quad t + \Delta)\Delta \tag{33}$$

и

$$u(t + \Delta) = u(t) + \frac{1}{6}[k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3], \tag{34}$$

$$v(t + \Delta) = v(t) + \frac{1}{6}[n_0 + 2n_1 + 2n_2 + n_3]. \tag{35}$$

Аналогичные формулы имеют место и для систем более высокой размерности. Точно так же можно вывести и многомерный аналог формул (20), (23) для метода Адамса — Мултона.

5. Устойчивость и анализ ошибок

В этом разделе мы кратко остановимся на одном из основных аспектов численного анализа и решения задач Коши — на устойчивости применяемого метода и минимизации некоторой выбранной меры ошибки. Каждый, кто хотя бы в общих чертах знаком с численным решением дифференциальных уравнений, ясно понимает, что понятия устойчивости метода и меры ошибки неразрывно связаны друг с другом, а именно устойчивость является одним из факторов, влияющих на меру ошибки. Однако, проводя анализ ошибок при решении некоторой конкретной задачи, важно четко различать возможные источники ошибок. Поэтому из педагогических соображений мы искусственно отделим от полного анализа ошибок некоторые «неотделимые» вещи, такие, как устойчивость, заранее предупредив читателя об истинном положении дел.

Для того чтобы ввести понятие устойчивого численного решения, рассмотрим рекуррентное соотношение

$$u_{i+1} = T_i(u_i, u_{i-1}, \dots, u_1), \quad u_1 = c, \quad i = 1, 2, \dots, N, \qquad (1)$$

где последовательность $\{u_i\}$ является набором действительных чисел, а $\{T_i\}$ есть последовательность арифметических преобразований, определенных на множестве всех последовательностей действительных чисел. Назовем соотношение (1) «численным процессом». Совершенно ясно, что все формулы численного интегрирования, рассмотренные в предыдущем разделе, можно рассматривать, как частные случаи соотношения (1). Нас же интересует анализ этого численного процесса при больших N.

Практически мы не можем вычислить последовательность $\{u_i\}$ точно по соотношению (1), поскольку при вычислении правой части (1) каждый раз вносится некоторая ошибка, и поэтому при вычислении следующего элемента последовательности мы исходим из неточных данных. Таким образом, на самом деле мы получаем последовательность $\{\bar{u}_i\}$, такую, что

$$\bar{u}_{i+1} = T_i(\bar{u}_i, \bar{u}_{i-1}, \dots, u_1) + \delta_i, \qquad u_1 = c, \qquad (2)$$

где δ_i — обычно малый параметр, точное значение которого определяется такими соображениями, как значения $\bar{u}_k$, $k = 1, 2, \ldots, i$, ошибки округления и т. д.

Итак, мы пришли к вопросу о том, остается ли δ_i достаточно малым при всех i. Интуитивно мы ощущаем, что решение численно устойчиво, если оно изменяется «не слишком быстро». Более точно, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что $\| u_1 - \bar{u}_1 \| < \delta$ влечет за собой $\| u_i - \bar{u}_i \| < \varepsilon$ для всех i, то решение $\{\bar{u}_i\}$ называется устойчивым. В этом случае $\| \cdot \|$ обозначает соответствующую норму в пространстве последовательностей, содержащем $\{u_i\}$ и $\{\bar{u}_i\}$.

Важно отметить, что численная устойчивость определяется только через решение, а не через процесс решения. Поскольку решение зависит только от начального значения u_1, то для некоторых классов операторов T_i изменение начальных значений может полностью изменить поведение решения в целом. Таким образом, имеет смысл говорить о численной устойчивости лишь в том случае, когда решение единственно.

Как видно из предыдущего, основными факторами, влияющими на численную устойчивость решения, являются структура программы для ЭЦВМ, число арифметических операций, необходимое для исполнения оператора T_i, и длина машинного слова (ошибки округления). Все эти факторы необходимо проанализировать прежде, чем передать задачу на решение.

Помимо устойчивости, важнейшими факторами, влияющими на точность описанных выше методов численного интегрирования, являются поведение функции $h(u, t)$, длина интервала интегрирования и длина шага интегрирования. В большинстве случаев мы не можем управлять функцией h или длиной интервала, поскольку они обычно определяются самой задачей. Однако шаг интегрирования можно изменять с тем, чтобы получить возможность как-то управлять погрешностью решения. Так, например, можно показать, что при решении некоторого уравнения методом Эйлера независимая оценка ошибки ε_n в точке t_n имеет такой вид:

$$|\varepsilon_n| \leqslant \frac{\Delta N_1}{2K}(\exp(k(t_n - t_0)) - 1, \qquad (3)$$

где t_0 — начальная точка интервала, $t_n = t_0 + n\Delta$, K — константа Липшица для функции h, а N_1 — верхняя грань $h(u, t)$. Важность оценки (3) определяется тем, что она ясно показывает, что в фиксированной точке интервала (t_0, t_N) ошибка стремится к нулю при $\Delta \to 0$. Аналогичные оценки для методов Рунге—Кутта и Адамса—Мултона, правда, не настолько простые, как (3), показывают, что в большинстве случаев можно ожидать увеличения точности решения при уменьшении Δ до тех пор, пока ошибки округления не станут играть определяющую роль. В тот момент, когда вклад ошибок округления в общую погрешность становится решающим, вычислитель оказывается перед дилеммой. Дальнейшее уменьшение размера шага Δ лишь увеличит ошибки округления, поскольку число значащих цифр на каждом шаге фиксировано из-за ограниченности разрядной сетки машины; с другой стороны, как это видно из (3), уменьшение Δ все же желательно. Это как раз и есть та туманная область, где получение численного решения становится в большей степени искусством, чем наукой, и прошлый вычислительный опыт является здесь решающим фактором. На практике существует один простой метод — это решить задачу с одной длиной шага, затем уменьшить шаг вдвое и решить эту задачу еще раз. Если полученные таким образом решения достаточно близки, то решение на этом можно прекратить; в противном случае необходимо продолжить процесс. Эта процедура позволяет проверить надежность схемы численного интегрирования. Кроме того, комбинируя полученные решения, можно построить более точное приближение к решению исходной задачи, чем любое из пробных решений[1]). Ссылки на этот метод приведены в конце главы.

---

[1]) Здесь авторы, вероятно, имеют в виду метод Рунге, где предполагается, что приближенное решение уравнения является аналитической функцией от Δ^2. Поэтому, комбинируя решения с шагами Δ и $\Delta/2$, можно получить решение с погрешностью порядка $O(\Delta^4)$, если два предыдущих решения вычислены с погрешностью $O(\Delta^2)$. — *Прим. перев.*

6. Сравнение задачи Коши с двухточечной граничной задачей

До сих пор мы рассматривали лишь задачи Коши, в которых все условия, необходимые для определения решения, заданы в единственной точке. Однако во многих задачах математической физики, техники, экономики и биологии условия заданы в двух или более точках и потому эти задачи не укладываются в класс задач, рассмотренных ранее.

Рассмотрим, например, одномерную двухточечную граничную задачу

$$u'' + k_1 u = 0, \tag{1}$$

$$u(0) = c_1, \quad u(T) = c_2, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

где k_1, c_1 и c_2 — постоянные. Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$u = a_1 \exp(\alpha_1 t) + a_2 \exp(\alpha_2 t), \quad \alpha_1 \neq \alpha_2. \tag{3}$$

Используя граничные условия (2), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно a_1 и a_2

$$a_1 + a_2 = c_1, \quad \exp(\alpha_1 T)\, a_1 + \exp(\alpha_2 T)\, a_2 = c_2. \tag{4}$$

Известно, что система (4) обладает единственным решением, если

$$D(T) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \exp(\alpha_1 T) & \exp(\alpha_2 T) \end{vmatrix} =$$

$$= \exp(\alpha_2 T) - \exp(\alpha_1 T) \neq 0. \tag{5}$$

Условие (5) имеет место для всех $T > 0$, если α_1 и α_2 действительны и $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Если, однако, α_1 и α_2 составляют комплексно сопряженную пару

$$\alpha_1 = x + iy, \quad \alpha_2 = x - iy,$$

то легко видеть, что

$$D(T) = \exp(\alpha_2 T) - \exp(\alpha_1 T) = e^{xT}\left(e^{-iyT} - e^{iyT}\right),$$

и поэтому определитель $D(T)$ обращается в нуль при $T = n\pi/y$, $n = 1, 2, \ldots$.

Следует отметить одно важное обстоятельство, а именно, что двухточечные граничные условия принципиально отличаются от условий, заданных в одной точке, в отношении существования и единственности решения. Легко построить двухточечную граничную задачу, которая в зависимости от длины интервала имеет одно решение, бесконечно много решений или не имеет решений вообще. Это резко отличается от ситуации, устанавливаемой теоремой существования и единственности для задачи Коши.

Помимо серьезных математических трудностей, возникающих при аналитическом решении двухточечных граничных задач, численные аспекты также служат дополнительным мотивом развития методов, излагаемых в последующих главах.

Как было показано выше, цифровые вычислительные машины идеально приспособлены для итеративных методов решения задачи Коши с заданным набором начальных условий. В случае двухточечных граничных условий у нас нет достаточного количества условий ни в одной из двух точек в отдельности для применения описанных выше стандартных процедур численного интегрирования. В результате мы вынуждены прибегать к различным хитростям, уловкам и «высосанным из пальца» догадкам для успешного построения численного решения. В эру полностью автоматизированных процедур такое положение дел является признаком слабости и незнания внутренней структуры решаемой задачи. В остальных главах мы будем рассматривать различные типы функциональных уравнений, возникающих в физических и технических приложениях, постоянно стремясь переформулировать эти задачи в терминах задачи Коши.

Замечания и литература

§ 2. Ссылки на классические работы о применении теории матриц к дифференциальным уравнениям приведены в книгах

Беллман Р., Введение в теорию матриц, изд-во «Наука», М., 1969.

Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, изд-во «Наука», М., 1967.

Многочисленные приложения теории матриц к разнообразным задачам прикладной математики, физики и техники описываются многими авторами. См., например,

Лихнерович (Lichnerowicz A.), Linear algebra and analysis, Holden-Day Co., San Francisco, 1967.

Неринг (Nering E.), Linear algebra and matrix theory, John Wiley, New York, 1963.

Хон (Hohn F.), Elementary matrix algebra, Macmillan Publishing Co., New York, 1964.

§ 3. Изложение обсуждаемого здесь материала на вводном уровне можно найти в работе

Беллман (Bellman R.), Modern elementary differential equations, Addison-Wesley Co., Reading, Mass., 1967.

Дальнейшие результаты теории обыкновенных дифференциальных уравнений приведены в книгах

Коддингтон С., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1958.

Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Гос. научно-техн. изд-во Украины, Харьков, 1939.

Хартман П., Обыкновенные дифференциальные уравнения, изд-во «Мир», М., 1970.

§ 4. Подробное изложение этого материала можно найти почти в любом учебнике по численному анализу. Особенно рекомендуем

Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1953.

Бабушка И., Прагер М., Витасек Е., Численные процессы решения дифференциальных уравнений, изд-во «Мир», М., 1969.

Айзексон, Келлер (Isaacson E., Keller H.), Analysis of numerical methods, Wiley, New York, 1966.

Энричи (Henrici P.), Discrete variable methods in ordinary differential equations, Wiley, New York, 1962.

§ 5. Аналитические (в отличие от численных) вопросы теории устойчивости подробно рассмотрены в книгах

Беллман Р., Теория устойчивости решения дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1954.

Ла-Салль Ж., Лефшец С., Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, изд-во «Мир», М., 1964.

Чезари (Cesari L.), Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations, Springer-Verlag, New York, 1963.

Вопросы численной устойчивости различных конечно-разностных алгоритмов рассмотрены в книгах

Энричи (Henrici P.,) Error propagation for difference methods, Wiley, New York, 1963.

Дальквист (Dahlquist G.), Stability and error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations, *Trans. Roy. Inst. Tech., Stockholm*, №. 130, 1959.

Вендрофф (Wendroff B.), Theoretical numerical analysis, Academic Press, New York, 1966.

§ 6. Численным вопросам решения линейных и нелинейных двухточечных граничных задач различных классов посвящены книги

Беллман Р., Калаба Р., Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи, изд-во «Мир», М., 1968.

Келлер (Keller H.), Numerical methods for two-point boundary value problems, Ginn—Blaisdell, Waltham, Mass., 1968.

Ли (Lee S.) Quasilinearization and invariant imbedding, Academic Press, New York, 1968.

Глава 3
ДВУХТОЧЕЧНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Введение

Объект наших исследований в этой главе — двухточечные граничные задачи — представляет, возможно, простейший класс в множестве задач, к которым можно применять наши методы. Это вовсе не означает, что двухточечные граничные задачи просты с математической точки зрения, поскольку по любым стандартам теория таких задач еще далеко не завершена и до сих пор активно разрабатывается. С другой стороны, мы хотим подчеркнуть, что двухточечные граничные задачи обладают простейшей нетривиальной структурой, ярко проявляющей те неприятные особенности, справиться с которыми и призвана наша теория. В результате идеи, излагаемые в этой главе, послужат ключом к решению более сложных функциональных уравнений.

На протяжении этой главы мы будем рассматривать способы сведения различных линейных и нелинейных двухточечных граничных задач к задачам Коши. Мы начинаем изложение с разбора простых линейных систем, иллюстрируя идеи и результаты на примере уравнения Пуассона. При этом мы обсудим также вопрос применения этих идей для построения функции Грина. Далее мы рассматриваем различные типы нелинейных задач. Ниже мы формулируем соответствующие задачи Коши и приводим их обоснование, показывающее, что с математической точки зрения эти задачи эквивалентны исходным граничным задачам.

2. Линейные двухточечные граничные задачи

Мы начинаем изучение двухточечных граничных задач с рассмотрения скалярных уравнений

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)y(t),$$
$$\alpha_1 x(0) + \alpha_2 y(0) = 0, \tag{1}$$

$$\dot{y}(t) = c(t)x(t) + d(t)y(t) + f(t),$$
$$\alpha_3 x(T) + \alpha_4 y(T) = 1, \tag{2}$$

где a, b, c, d, f непрерывны на $0 \leqslant t \leqslant T$, а $\{\alpha_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, постоянны. Хотя уравнения (1) — (2) и не являются наиболее общей формой линейной двухточечной граничной задачи, тем не менее в эту схему укладывается большинство интересных задач физики и техники. Читатель, заинтересованный в задачах более общего вида, включающих многомерные аналоги задачи (1) — (2) или отличающихся от них другой формой задания граничных условий, сможет без труда распространить излагаемый ниже подход и на эти случаи. Некоторые результаты в этом направлении мы приведем в § 12.

Поскольку полный набор условий, позволяющих определить x и y единственным образом, задан не в одной, а в двух точках $t = 0$ и $t = T$, задача (1) — (2) называется двухточечной граничной задачей. Такая двухточечная система задания условий весьма усложняет как анализ, так и численное решение задачи (1) — (2), поскольку в каждой из этих точек в отдельности не содержится достаточной информации для полного определения векторного поля $(x(t), y(t))$. С вычислительной точки зрения это соответствует ситуации, когда непосредственное применение различных схем численного интегрирования, таких, как методы Рунге—Кутта, Адамса—Мултона и т. д., невозможно из-за отсутствия в начальной точке информации, необходимой для «запуска» алгоритма. Стоит ли говорить, что эти трудности становятся еще более острыми в случае нелинейных задач.

Наша цель состоит в том, чтобы сформулировать задачу Коши (вместо двухточечной граничной задачи), которая «представляла» бы решение задачи (1) — (2). Под термином «представляет» мы понимаем тот факт, что решение задачи Коши единственным образом определяет решение граничной задачи и наоборот. Иными словами, эти задачи изоморфны и в результате любые свойства,

установленные для одной из задач, автоматически оказываются верными и для другой. Поскольку мы преследуем в основном педагогические цели, большинство наших результатов мы будем получать, оставляя в стороне тонкие моменты (которые в некоторых случаях оказываются весьма нетривиальными). Итак, вернемся к нашей задаче.

Параметром погружения, который мы будем использовать при построении задачи Коши, является длина интервала T. Поэтому перепишем (1) — (2), чтобы явно подчеркнуть зависимость решения от T:

$$\dot{x}(t, T) = a(t)\; x(t, T) + b(t)\; y(t, T),$$
$$\alpha_1 x(0, T) + \alpha_2 y(0, T) = 0, \tag{3}$$

$$\dot{y}(t, T) = c(t)\; x(t, T) + d(t)\; y(t, T) + f(t),$$
$$\alpha_3 x(T, T) + \alpha_4 y(T, T) = 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{4}$$

Для лучшего понимания изложения воспользуемся линейностью системы (3) — (4) и рассмотрим две системы уравнений:

Система I

$$\dot{u}(t, T) = a(t)u + b(t)v,$$
$$\alpha_1 u(0, T) + \alpha_2 v(0, T) = 0, \tag{5}$$

$$\dot{v}(t, T) = c(t)u + d(t)v + f(t),$$
$$\alpha_3 u(T, T) + \alpha_4 v(T, T) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{6}$$

и

Система II

$$\dot{p}(t, T) = a(t)p + b(t)q,$$
$$\alpha_1 p(0, T) + \alpha_2 q(0, T) = 0, \tag{7}$$

$$\dot{q}(t, T) = c(t)p + d(t)q,$$
$$\alpha_3 p(T, T) + \alpha_4 q(T, T) = 1. \tag{8}$$

Принцип суперпозиции для линейных систем позволяет записать

$$x(t, T) = u(t, T) + p(t, T), \tag{9}$$

$$y(t, T) = v(t, T) + q(t, T), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{10}$$

Поэтому рассмотрим системы I и II по отдельности.

Рассмотрим сначала функции u и v системы I. Нас интересует, как изменяются кривые решения в фиксированной точке t, $0 \leqslant t \leqslant T$, при изменении длины интервала T. Дифференцируя (5) — (6) по T, получим

$$\dot{u}_T(t, T) = a(t)\, u_T(t, T) + b(t)\, v_T(t, T),$$

$$\alpha_1 u_T(0, T) + \alpha_2 v_T(0, T) = 0, \tag{11}$$

$$\dot{v}_T(t, T) = c(t)\, u_T(t, T) + d(t)\, v_T(t, T),$$

$$\alpha_3 [\dot{u}(T, T) + u_T(T, T)] + \alpha_4 [\dot{v}(T, T) + v_T(T, T)] = 0,$$

$$0 \leqslant t \leqslant T. \tag{12}$$

Здесь точка сверху обозначает дифференцирование по t, а $(\quad)_T$ — дифференцирование по T. Сравнивая (11) — (12) с (7) — (8), видим, что

$$u_T(t, T) = -[\alpha_3 \dot{u}(T, T) + \alpha_4 \dot{v}(T, T)]\, p(t, T), \tag{13}$$

$$v_T(t, T) = -[\alpha_3 \dot{u}(T, T) + \alpha_4 \dot{v}(T, T)]\, q(t, T), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{14}$$

Рассмотрим квадратную скобку из (13), (14). Подставив $t = T$ в (5) — (6), получим

$$\dot{u}(T, T) = a(T)\, u(T, T) + b(T)\, v(T, T). \tag{15}$$

$$\dot{v}(T, T) = c(T)\, u(T, T) + d(T)\, v(T, T) + f(T). \tag{16}$$

Введем теперь новые переменные m и n:

$$m(T) = u(T, T), \tag{17}$$

$$n(T) = v(T, T), \quad T \geqslant 0. \tag{18}$$

Учитывая (15) — (16), достаточно определить функции m и n. Рассмотрим сначала m.

Продифференцируем уравнение (13) и получим

$$m'(T)=\dot{u}(T,T)+u_T(T,T)=a(T)m(T)+ \\ +b(T)n(T)-\{\alpha_3[a(T)m(T)+b(T)n(T)]+ \\ +\alpha_4[c(T)m(T)+d(T)n(T)+ \\ +f(T)]\}p(T,T),\quad T>0. \qquad (19)$$

Аналогично для n получаем

$$n'(T)=\dot{v}(T,T)+v_T(T,T)=c(T)m(T)+ \\ +d(T)n(T)+f(T)-\{\alpha_3[a(T)m(T)+b(T)n(T)]+ \\ +\alpha_4[c(T)m(T)+d(T)n(T)+ \\ +f(T)]\}q(T,T),\quad T>0. \qquad (20)$$

Из уравнений (19) и (20) видно, что мы должны рассмотреть величины $p(T,T)$ и $q(T,T)$.

Дифференцируя (7) и (8) по T, получим

$$\dot{p}_T(t,T)=a(t)p_T+b(t)q_T, \\ \alpha_1 p_T(0,T)+\alpha_2 q_T(0,T)=0, \qquad (21)$$

$$\dot{q}_T(t,T)=c(t)p_T+d(t)q_T, \\ \alpha_3[\dot{p}(T,T)+p_T(T,T)]+\alpha_4[\dot{q}(T,T)+ \\ +q_T(T,T)]=0,\qquad 0\leqslant t\leqslant T. \qquad (22)$$

Сравнивая (7)—(8) с (21)—(22), получаем

$$p_T(t,T)=-[\alpha_3\dot{p}(T,T)+\alpha_4\dot{q}(T,T)]\,p(t,T) \qquad (23)$$

и

$$q_T(t,T)=-[\alpha_3\dot{p}(T,T)+\alpha_4\dot{q}(T,T)]\,q(t,T), \\ 0\leqslant t\leqslant T. \qquad (24)$$

Для использования этих соотношений заметим, что из (7) и (8) при $t = T$ вытекает

$$\dot{p}(T, T) = a(T)\,p(T, T) + b(T)\,q(T, T), \tag{25}$$

$$\dot{q}(T, T) = c(T)\,p(T, T) + d(T)\,q(T, T). \tag{26}$$

Пусть функции r и s определяются равенствами

$$r(T) = p(T, T), \tag{27}$$

$$s(T) = q(T, T). \tag{28}$$

Выведем теперь задачу Коши для r и s. Прежде всего продифференцируем r по t:

$$\begin{aligned} r'(T) = \dot{p}(T, T) + p_T(T, T) = a(T)\,r(T) + \\ + b(T)\,s(T) - \{\alpha_3[a(T)\,r + b(T)\,s] + \\ + \alpha_4[c(T)\,r + d(T)\,s]\}\,r. \end{aligned} \tag{29}$$

Аналогично получим уравнение для s:

$$\begin{aligned} s'(T) = c(T)\,r + d(T)\,s - \{\alpha_3[a(T)\,r + b(T)\,s] + \\ + \alpha_4[c(T)\,r + d(T)\,s]\}\,s, \qquad T > 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Элементарными преобразованиями (29) и (30) приводятся к системе

$$\begin{aligned} r'(T) = b(T)\,s + r[a(T) - \alpha_3 b(T)\,s - \alpha_4 d(T)\,s] - \\ - r^2[\alpha_3 a(T) + \alpha_4 c(T)], \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} s'(T) = c(T)\,r + s[d(T) - \alpha_3 a(T)\,r - \alpha_4 c(T)\,r] - \\ - s^2[\alpha_3 b(T) + \alpha_4 d(T)], \qquad T > 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Начальные условия при $T = 0$ получаются из уравнений (7) и (8) как решение системы

$$\alpha_1 r(0) + \alpha_2 s(0) = 0, \tag{33}$$

$$\alpha_3 r(0) + \alpha_4 s(0) = 1. \tag{34}$$

Очевидно, отсюда получается условие разрешимости $\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3 \neq 0$, гарантирующее существование единственного решения.

Знание r и s позволяет получить p и q, решая задачу Коши (23) — (24). Соответствующие уравнения при этом имеют вид

$$p_T(t, T) = -\{r[\alpha_3 a(T) + \alpha_4 c(T)] + s[\alpha_3 b(T) + \alpha_4 d(T)]\} p(t, T), \tag{35}$$

$$q_T(t, T) = -\{r[\alpha_3 a(T) + \alpha_4 c(T)] + s[\alpha_3 b(T) + \alpha_4 d(T)]\} q(t, T), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{36}$$

Начальными условиями при $T = t$ являются

$$p(t, t) = r(t), \tag{37}$$

$$q(t, t) = s(t). \tag{38}$$

Возвращаясь теперь к уравнениям (19) и (20) для функций m и n, мы видим, что

$$m'(T) = a(T)m + b(T)n - \{m[\alpha_3 a(T) + \alpha_4 c(T)] + n[\alpha_3 b(T) + \alpha_4 d(T)] + f(T)\} r(T), \tag{39}$$

$$n'(T) = c(T)m + d(T)n + f(T) - \{m[\alpha_3 a(T) + \alpha_4 c(T)] + n[\alpha_3 b(T) + \alpha_4 d(T)] + f(T)\} s(T), \quad T > 0. \tag{40}$$

Начальные условия при $T = 0$ определяются из уравнений (5) и (6) как

$$m(0) = 0, \tag{41}$$

$$n(0) = 0. \tag{42}$$

Уравнения для функций u и v через m и n имеют вид

$$u_T(t, T) = -\{m[\alpha_3 a(T) + \alpha_4 c(T)] + n[\alpha_3 b(T) + \alpha_4 d(T)] + f(T)\} p(t, T), \tag{43}$$

$$v_T(t, T) = -\{m[\alpha_3 a(T) + \alpha_4 c(T)] + n[\alpha_3 b(T) + \alpha_4 d(T)] + f(T)\} q(t, T), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{44}$$

При $T = t$ имеем

$$u(t,\ t) = m(t), \tag{45}$$

$$v(t,\ t) = n(t). \tag{46}$$

Этим завершается вывод полной задачи Коши для определения функций u, v, p и q, необходимых для получения решения x и y задачи (1)—(2).

3. Окончательный вид задачи Коши

Поскольку выкладки, проведенные в предыдущем параграфе были довольно длинными, запишем кратко все основные соотношения. Полностью задача Коши состоит из следующих уравнений для определения функций r, s, m, n, p, q, u и v:

$$r'(T) = b(T)s + r[a(T) - \alpha_3 b(T)s - \alpha_4 d(T)s] - \\ - r^2[\alpha_3 a(T) + \alpha_4 c(T)], \tag{1}$$

$$s'(T) = c(T)r + s[d(T) - \alpha_3 a(T)r - \alpha_4 c(T)r] - \\ - s^2[\alpha_3 b(T) + \alpha_4 d(T)], \tag{2}$$

$$m'(T) = a(T)m + b(T)n - \{m[\alpha_3 a(T) + \alpha_4 c(T)] + \\ + n[\alpha_3 b(T) + \alpha_4 d(T)] + f(T)\}\, r(T), \tag{3}$$

$$n'(T) = c(T)m + d(T)n + f(T) - \{m[\alpha_3 a(T) + \\ + \alpha_4 c(T)] + n[\alpha_3 b(T) + \alpha_4 d(T)] + f(T)\}\, s(T), \tag{4}$$

$$p_T(t,\ T) = -\{r[\alpha_3 a(T) + \alpha_4 c(T)] + \\ + s[\alpha_3 b(T) + \alpha_4 d(T)]\}\, p(t,\ T), \tag{5}$$

$$q_T(t,\ T) = -\{r[\alpha_3 a(T) + \alpha_4 c(T)] + \\ + s[\alpha_3 b(T) + \alpha_4 d(T)]\}\, q(t,\ T), \tag{6}$$

$$u_T(t,\ T) = -\{m[\alpha_3 a(T) + \alpha_4 c(T)] + \\ + n[\alpha_3 b(T) + \alpha_4 d(T)] + f(T)\}\, p(t,\ T), \tag{7}$$

$$v_T(t,\ T) = -\{m[\alpha_3 a(T) + \alpha_4 c(T)] + n[\alpha_3 b(T) + \alpha_4 d(T)] + f(T)\}\, q(t,\ T),$$
$$0 \leqslant t \leqslant T. \quad (8)$$

Начальные условия задаются уравнениями

$$\alpha_1 r(0) + \alpha_2 s(0) = 0,$$
$$\alpha_3 r(0) + \alpha_4 s(0) = 1, \quad (9)$$
$$m(0) = 0, \quad (10)$$
$$n(0) = 0, \quad (11)$$
$$p(t,\ t) = r(t), \quad (12)$$
$$q(t,\ t) = s(t), \quad (13)$$
$$u(t,\ t) = m(t), \quad (14)$$
$$v(t,\ t) = n(t). \quad (15)$$

Тогда решение исходной задачи определяется как

$$x(t,\ T) = u(t,\ T) + p(t,\ T), \quad (16)$$
$$y(t,\ T) = v(t,\ T) + q(t,\ T). \quad (17)$$

Предположим, что мы хотим получить решение для множества точек $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_N \leqslant T^*$, где T^* — длина интервала интегрирования. Процедура решения тогда заключается в интегрировании уравнений для r, s, m и n от $T = 0$ до $T = t_1$. В этой точке добавляются уравнения для функций $p(t_1,\ T)$, $q(t_1,\ T)$, $u(t_1,\ T)$ и $v(t_1, T)$ с начальными условиями (12)—(15). Полученная система далее интегрируется от $T = t_1$ до $T = t_2$, где добавляются уравнения для функций $p(t_2,\ T)$, $q(t_2,\ T)$, $u(t_2,\ T)$, $v(t_2,\ T)$ с соответствующими начальными условиями. Эта процедура выполняется для всех t_i, и интегрирование продолжается до $T = T^*$. В этой точке из функций $p(t_i,\ T^*)$, $q(t_i,\ T^*)$, $u(t_i,\ T^*)$ и $v(t_i,\ T^*)$ с помощью соотношений (16) и (17) строится нужное решение. Заметим, что в процессе интегрирования можно получить решение для всех длин интервалов, меньших T^*. Последнее свойство дает возможность провести анализ параметрической задачи, что может оказаться интересным во многих ситуациях.

4. Пример неустойчивой задачи

Для иллюстрации одной из сторон нашей теории рассмотрим простую линейную систему

$$\dot{x} = 10y, \qquad x(0) = 0, \tag{1}$$

$$\dot{y} = 10x, \qquad y(2) = 1. \tag{2}$$

Собственные значения этой системы равны ± 10. Поскольку длина интересующего нас интервала ($T = 2$) не мала, получение двух точных независимых решений на машине с помощью какого-либо пошагового метода — задача не из легких.

Значения введенных выше параметров в данном конкретном случае равны $\alpha_1 = \alpha_4 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $a(t) = d(t) = f(t) = 0$, $b(t) = c(t) = 10$. Заметим, что поскольку $f \equiv 0$, следует определить лишь функции p и q. Задача Коши принимает вид

$$r'(T) = 10 - 10r^2, \quad r(0) = 0, \tag{3}$$

$$p_T(t, T) = -10r(T)\,p(t, T), \quad p(t, t) = r(t), \tag{4}$$

$$q_T(t, T) = -10r(T)\,q(t, T), \quad q(t, t) = 1. \tag{5}$$

Из природы граничных условий, очевидно, вытекает, что $s(T) \equiv 1$. Из уравнения (3) видно, что $0 \leqslant r(T) \leqslant 1$, $T \geqslant 0$. В силу этих ограничений уравнения (4) и (5) не имеют решений, возрастающих с ростом T. Для этого простого примера это видно и из аналитического выражения для решения задачи

$$r(T) = \operatorname{th} 10T, \qquad T \geqslant 0, \tag{6}$$

$$p(t, T) = \frac{\operatorname{sh} 10t}{\operatorname{ch} 10T} = x(t, T), \tag{7}$$

$$q(t, T) = \frac{\operatorname{ch} 10t}{\operatorname{ch} 10T} = y(t, T), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{8}$$

Эта задача указывает на один из важных признаков нашего метода, который будет часто проявляться и в дальнейшем, а именно на то, что хотя исходная граничная задача может быть численно очень неустойчивой,

эквивалентная задача Коши обычно обладает численно устойчивым решением. В более общих ситуациях, когда явное решение получить невозможно, устойчивость не является столь очевидной, однако все же может быть установлена при соответствующих предположениях о функциях a, b, c, d. Множество результатов такого типа можно найти в литературе, приведенной в конце главы.

5. Многомерные системы

Часто линейные двухточечные граничные задачи предстают в виде систем уравнений типа

$$\dot{x}(t) = A(t)x + B(t)y,$$
$$(x(0),\ \alpha_1) + (y(0),\ \alpha_2) = 0, \qquad (1)$$

$$\dot{y}(t) = C(t)x + D(t)y + f(t),$$
$$(x(T),\ \alpha_3) + (y(T),\ \alpha_4) = 1, \qquad t \geqslant 0, \qquad (2)$$

где x, y, f, α_1, α_2, α_3, α_4 суть n-мерные векторы, A, B, C, D суть $n \times n$-матрицы, а $(\cdot\,,\ \cdot)$ обозначает обычное скалярное произведение. Читатель, вероятно, не встретит трудностей при перенесении результатов предыдущих параграфов на этот случай, если воспользуется той же системой рассуждений и будет использовать обычные операции над векторами и матрицами. Можно показать, что соответствующая задача Коши на этот раз будет включать матричное уравнение Риккати, обладающее теми же свойствами численной устойчивости, что были указаны выше для одномерного случая.

6. Уравнение Пуассона и численная неустойчивость

Для иллюстрации устойчивости и численной эффективности метода погружения рассмотрим решение уравнения Пуассона на прямоугольнике с помощью модификации Канторовича процедуры Релея — Ритца. Кроме того, этот пример продемонстрирует решение задачи,

граничные условия которой заданы не так, как это было ранее.

Интересующая нас задача такова:

$$u_{xx}+u_{yy}=-2, \quad (x,\ y)\in R,$$
$$u(x,\ y)=0, \quad (x,\ y)\in \partial R, \tag{1}$$

где R — область на плоскости $x,\ y$: $\{(x,\ y)\colon 0\leqslant x\leqslant 1, -1\leqslant y\leqslant 1\}$. Эта задача возникает при определении положения равновесия тонкой мембраны с закрепленными краями, смещаемой силой 2 единицы на единицу площади в положительном направлении оси z. С помощью стандартного метода разделения переменных можно показать, что решение задачи (1) можно записать в виде

$$u(x,\ y)=x(1-x)-\frac{8}{\pi^3}\sum_{n=1,\ 3,\ 5,\ \dots}\frac{\operatorname{ch} n\pi y\operatorname{sh} n\pi x}{n^3\operatorname{ch} n\pi}. \tag{2}$$

Эта формула будет использована при оценке точности описанной ниже численной процедуры.

Решение задачи (1), кроме того, минимизирует квадратичный функционал

$$J=\iint_R\left[w_x^2+w_y^2-4w\right]dy\,dx \tag{3}$$

при граничных условиях из задачи (1). С помощью классических вариационных методов (принцип Дирихле) можно показать, что функция w, минимизирующая J при соответствующих граничных условиях, является единственным решением задачи (1).

Используем для минимизации J модификацию процедуры Релея — Ритца, предложенную Канторовичем. Будем искать минимизирующую функцию w в виде

$$w(x,\ y)=f(x)(y^2-1). \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), получим вариационный интеграл для неизвестной функции f:

$$J(f)=\int_0^1\left[\frac{16}{15}f'^2+\frac{8}{3}f^2+\frac{16}{3}f\right]dx. \tag{5}$$

Уравнение Эйлера для (5) имеет вид

$$f'' - \frac{5}{2} f = \frac{5}{2}. \qquad (6)$$

Для того чтобы w удовлетворяла граничным условиям из (1), необходимо, чтобы

$$f(0) = f(1) = 0. \qquad (7)$$

В этом случае двухточечная граничная задача имеет явное решение

$$f(x) = -1 + \operatorname{ch}\left(\sqrt{10}\, x/2\right) + \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\sqrt{10}/2)}{\operatorname{sh}(\sqrt{10}/2)}\right) \operatorname{sh}\left(\sqrt{10}\, x/2\right). \qquad (8)$$

Появление гиперболических функций даже в этом простом случае указывает на возможную численную неустойчивость, которая может крайне затруднить решение обычными численными методами. Поэтому применим метод погружения для получения задачи Коши, дающей решение f. Заметим, что граничные условия (7) препятствуют непосредственному использованию полученных ранее результатов, поскольку $\alpha_1\alpha_4 - \alpha_3\alpha_2 = 0$.

7. Другой вид задачи Коши

Будем рассматривать двухточечную граничную задачу для определения f как частный случай несколько более общей задачи

$$\dot{u}(t, T) = v(t, T), \qquad u(0, T) = 0, \qquad (1)$$

$$\dot{v}(t, T) = p(t) - q(t) v(t, T), \qquad u(T, T) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \qquad (2)$$

И на этот раз мы явно подчеркиваем зависимость функций u и v от T. Одновременно с (1) — (2) рассмотрим систему

$$\dot{w}(t, T) = z(t, T), \quad w(0, T) = 0, \qquad (3)$$

$$\dot{z}(t, T) = -q(t)w(t, T), \quad w(T, T) = 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \quad (4)$$

Продифференцируем сначала (1) и (2) по T. В результате получим

$$\dot{u}_T(t, T) = v_T(t, T); \qquad u_T(0, T) = 0, \quad (5)$$

$$\dot{v}_T(t, T) = -q(T)v_T(t, T),$$

$$\dot{u}(T, T) + u_T(T, T) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \quad (6)$$

Сравнивая (5) — (6) с (3) — (4), видим, что

$$u_T(t, T) = -\dot{u}(T, T)w(t, T), \quad (7)$$

$$v_T(t, T) = -\dot{u}(T, T)z(t, T), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \quad (8)$$

Аналогично, продифференцировав (3) — (4), получим

$$w_T(t, T) = -\dot{w}(T, T)w(t, T), \quad (9)$$

$$z_T(t, T) = -\dot{w}(T, T)z(t, T), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь $\dot{w}(T, T)$ и $\dot{u}(T, T)$.

Введем новую функцию $r(T)$ по формуле

$$r(T) = \dot{w}(T, T) = z(T, T). \quad (11)$$

Продифференцировав r по T и использовав (4) и (10), получим

$$\begin{aligned} r'(T) &= \dot{z}(T, T) + z_T(T, T) = \\ &= -q(T)w(T, T) - \dot{w}(T, T)z(T, T) = \\ &= -q(T) - r^2(T), \qquad T > 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, мы получили простое уравнение Риккати для определения r. Забудем на мгновение о начальном условии при $T = 0$. Знание функции r позволяет полностью определить w и z из уравнений (9) и (10),

поскольку из (4) и (11) вытекают очевидные начальные условия при $T = t$

$$w(t, t) = 1, \tag{13}$$

$$z(t, t) = r(t). \tag{14}$$

Рассмотрим теперь функцию $\dot{u}(T, T)$. Введем функцию $s(T)$ как

$$s(T) = \dot{u}(T, T) = v(T, T), \qquad T \geqslant 0. \tag{15}$$

Дифференцируя s по T и используя уравнения (2) и (8), получаем

$$s'(T) = \dot{v}(T, T) + v_T(T, T) =$$

$$= p(T) - q(T)s(T) - s(T)r(T), \qquad T > 0. \tag{16}$$

Начальное условие при $T = 0$ вытекает (в силу непрерывности) из уравнений (1)—(2):

$$s(0) = 0. \tag{17}$$

Вычислив функцию s, легко определить u и v с помощью уравнений (7)—(8), поскольку начальные условия при $T = t$, очевидно, имеют вид

$$u(t, t) = 0, \tag{18}$$

$$v(t, t) = s(t). \tag{19}$$

Единственный момент, который еще необходимо выяснить для полного описания задачи Коши, — это определение начального условия для r при $T = 0$. Поскольку по определению $r = \dot{w}(T, T)$, из уравнений (3)—(4) видно, что $r(T) \approx \frac{1}{T}$ при «малых» T. Это обстоятельство наводит на мысль разложить r в окрестности $T = 0$ в ряд Лорана

$$r(T) = \frac{1}{T} + a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots, \tag{20}$$

сходящийся при $0 < |T| \leqslant \varepsilon \ll 1$ к $r(T)$. Предполагая,

что в некоторой окрестности $T = 0$ функция q является аналитической, разложим ее в ряд Тейлора

$$q(T) = q_0 + q_1 T + q_2 T^2 + \cdots . \tag{21}$$

Подставляя выражения (20) и (21) в уравнение (12) и приравнивая члены с одинаковыми степенями T, получим последовательность $\{a_n\}$, несколькими первыми членами которой являются $a_0 = 0$, $a_1 = -q_0/3$, $a_2 = -q_1/4$, $a_3 = -(q_2 + q_0^2/9)/5$, $a_4 = -(q_3 + q_0 q_1/6)/6$, $a_5 = -(q_4 + 2q_0 q_2/15 + 2q_0^3/135 + q_1^2/16)/7$. Таким образом, мы используем (20) для вычисления начального условия на r для некоторого «малого» значения T в окрестности нуля.

8. Численные результаты

Уравнение, которое мы стремимся решить для отыскания f (уравнение (6.7)), соответствует частному случаю $q = -5/2$, $p = 5/2$, что приводит к следующему разложению:

$$r(T) \cong \frac{1}{T} + \frac{5}{6} T - \frac{5}{36} T^3 + \frac{25}{756} T^5 - \cdots . \tag{1}$$

К счастью, и в этом случае нам повезло с тем, что можно записать решение в явном виде

$$r(T) = \sqrt{5/2} \left[\frac{\exp(2\sqrt{5/2}\, T) + 1}{\exp(2\sqrt{5/2}\, T) - 1} \right]. \tag{2}$$

В таблице 1 приведены результаты для различных значений T.

Таблица 1

Начальные условия на r

T	Разложение в ряд	Точное значение
0,1	10,08319	10,08319
0,2	5,16557	5,16557
0,3	3,57966	3,57966
0,4	2,82478	2,82477

Как и можно было ожидать, точность приближения рядом ухудшается при увеличении T. Таким образом, для того чтобы начать процесс интегрирования, следует выбрать достаточно малое значение T, скажем T_0. Однако если T_0 слишком мало, то в результате мы начинаем интегрирование в области, где функция r изменяется очень быстро. Для практических целей можно выбирать T_0 таким, чтобы $r(T_0) = O(1)$. В наших вычислениях значения $T_0 = 0{,}3$, $T_0 = 0{,}4$ и $T_0 = 0{,}5$ выбирались для исследования снижения точности окончательного результата при снижении точности начальных условий.

В таблице 2 приведены результаты решения задачи Коши, описанной в предыдущем параграфе. Для сравнения приведено точное решение, вычисленное по формуле (6.8).

Таблица 2

Функция f при различных значениях T_0

t	Точное значение $f(t)$	$f(t)$ $T_0=0{,}3$	$f(t)$ $T_0=0{,}4$	$f(t)$ $T_0=0{,}5$
0,1	—0,0920630			
0,2	—0,1613803			
0,3	—0,2096884	—0,2096884		
0,4	—0,2381975	—0,2381975	—0,2382028	
0,5	—0,2476219	—0,2476219	—0,2476261	—0,2476469
0,6	—0,2381975	—0,2381975	—0,2382008	—0,2382169
0,7	—0,2096884	—0,2096884	—0,2096908	—0,2097025
0,8	—0,1613803	—0,1613803	—0,1613819	—0,1613895
0,9	—0,0920630	—0,0920630	—0,0920638	—0,0920676

Решение исходного уравнения с частными производными (6.1) было получено с помощью аппроксимации (6.4) и приведенных выше значений $f(x)$. Для сравнения была вычислена сумма первых 150 членов ряда Фурье (6.2) и, кроме того, вычислено решение при помощи

аппроксимации $w(x, y) = -x(1-x)(y^2-1)$ Релея — Ритца. Результаты приведены в таблице 3.

Таблица 3

Решение уравнения Пуассона тремя методами

(x, y)	Ряд Фурье	Метод Канторовича	Метод Релея—Ритца
(0,2; 0,6)	0,1157170	0,1032834	0,1024000
(0,4; 0,2)	0,2145170	0,2286696	0,2304000
(0,6; 0,6)	0,1688134	0,1524464	0,1536000
(0,8; 0,2)	0,1442439	0,1549251	0,1536000

Численное значение вариационного интервала (6.3) было вычислено как с помощью приведенной выше аппроксимации Релея — Ритца, так и с применением аппроксимации Канторовича с использованием функции $f(x)$. При этом получены следующие значения:

$$J_{\text{Релей — Ритц}} = -\frac{4}{9},$$

$$J_{\text{Канторович}} = -0{,}44470199.$$

Таким образом, процедура Канторовича действительно приводит к уменьшению значения J по сравнению с методом Релея — Ритца.

9. Функции Грина

Важным инструментом анализа самосопряженных двухточечных граничных задач является функция Грина. Однако, из-за трудности как аналитического, так и численного построения функции Грина она представляет скорее теоретическую, чем практическую ценность.

Цель этого параграфа состоит в том, чтобы показать, каким образом можно получить функцию Грина как решение некоторой устойчивой задачи Коши. Как и ранее, основная идея заключается в изучении поведения

функции Грина в фиксированной точке при изменении длины интервала. Эту идею, разумеется, можно рассматривать как новое звено в цепи рассуждений, первоначально построенной Адамаром.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}(t) - z(t)x(t) = -g(t), \qquad 0 < t < T, \tag{1}$$

с граничными условиями

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(T) = 1. \tag{2}$$

В предположении, что решение этой задачи существует и единственно, его можно записать в виде

$$x(t) = \int_0^T G(t, \xi) g(\xi)\, d\xi, \tag{3}$$

где ядро $G(t, \xi)$ является функцией Грина для данной задачи. Рассматривая G как функцию от t, ее можно представить как решение следующей задачи:

$$\ddot{G} - z(t)G = 0, \quad t \neq \xi, \quad 0 < t < T, \tag{4}$$

$$G(0, \xi) = 0, \qquad \dot{G}(T, \xi) = 0. \tag{5}$$

Кроме того, G непрерывна при $t = \xi$, однако ее первая производная в этой точке имеет скачок, определяемый формулой

$$\dot{G}(\xi^{+}, \xi) - \dot{G}(\xi^{-}, \xi) = -1. \tag{6}$$

В принципе эти свойства позволяют построить функцию G следующим образом. Пусть функция $h_0(t)$ такова, что

$$h_0''(t) - z(t)h_0(t) = 0, \tag{7}$$

$$h_0(0) = 0, \quad h_0'(0) = 1. \tag{8}$$

Тогда на интервале $0 \leqslant t \leqslant \xi$ функция G имеет вид

$$G(t, \xi) = Ah_0(t), \tag{9}$$

где A не зависит от t. Пусть $h_1(t)$ — решение задачи

$$h_1''(t) - z(t)h_1(t) = 0, \tag{10}$$

$$h_1(T) = 1, \qquad \dot{h}_1(T) = 0. \tag{11}$$

На интервале $\xi \leqslant t \leqslant T$ функция G имеет вид

$$G(t, \xi) = Bh_1(t), \tag{12}$$

где B также не зависит от t. Параметры A и B определяются из условий непрерывности G и скачка $\dot{G}$ в точке $t = \xi$,

$$Ah_0(\xi) - Bh_1(\xi) = 0, \tag{13}$$

$$A\dot{h}_0(\xi) - B\dot{h}_1(\xi) = 1. \tag{14}$$

Таким образом, функция Грина есть

$$G(t, \xi) = \begin{cases} -h_1(\xi)\, h_0(t)/\Delta, & 0 \leqslant t \leqslant \xi, \\ -h_0(\xi)\, h_1(t)/\Delta, & \xi \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{15}$$

где

$$\Delta = h_0(\xi)\, \dot{h}_1(\xi) - \dot{h}_0(\xi)\, h_1(\xi) = \text{const}. \tag{16}$$

Отметим, кстати, что отсюда вытекает симметричность G, т. е. $G(t, \xi) = G(\xi, t)$.

Только что описанная процедура выявляет структуру функции Грина, однако во многих случаях ее трудно реализовать численно, поскольку для получения функций h_0 и h_1 необходимо проинтегрировать уравнение

$$h'' - z(t)\, h(t) = 0 \tag{17}$$

как в направлении возрастания, так и в направлении убывания t. Если это уравнение обладает как убывающим, так и возрастающим экспоненциальными решениями (например, если $z(t) = k^2$, k постоянно), то точное интегрирование этого уравнения может оказаться весьма сложным делом из-за роста ошибок округления, что представляет собой хорошо известное явление. В следующем параграфе мы применим излагавшийся ранее подход построения задачи Коши для преодоления этой трудности.

10. Задача Коши для определения функции Грина

Используя результаты § 3, построим задачу Коши для функции G. Прежде всего перепишем уравнение (7.1) в виде

$$\dot{x}(t, T) = y, \qquad x(0, T) = 0, \tag{1}$$

$$\dot{y}(t, T) = z(t)x - g(t), \qquad y(T, T) = 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2}$$

Используя обозначения, введенные при постановке линейной граничной задачи общего вида, запишем $a = 0$, $b = 1$, $c = z(t)$, $d = 0$, $f = -g(t)$, $\alpha_1 = \alpha_4 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Соответствующая задача Коши имеет вид

$$r'(T) = 1 - z(T)r^2, \quad r(0) = 0, \tag{3}$$

$$m'(T) = -[mz(T) - g(T)]r, \quad m(0) = 0, \tag{4}$$

$$u_T(t, T) = -[mz(T) - g(T)]p(t, T), \quad u(t, t) = m(t), \tag{5}$$

$$p_T(t, T) = -r(T)z(T)p(t, T), \quad p(t, t) = r(t). \tag{6}$$

Поскольку нас не интересуют функции v и q, мы их не рассматриваем. Отметим также, что из вида граничных условий следует, что $s = 1$ и $n = 0$.

Из теории дифференциальных уравнений хорошо известно, что

$$u(t,T) = \int_0^T G(t, \xi, T)g(\xi)\,d\xi, \tag{7}$$

где мы явно указываем на зависимость G от T, t и ξ. Дифференцируя эту формулу по T, получим

$$u_T(t, T) = G(t, T, T)g(T) + \int_0^T G_T(t, \xi, T)g(\xi)\,d\xi. \tag{8}$$

Кроме того,

$$u(T, T) = m(T) = \int_0^T G(T, \xi, T)g(\xi)\,d\xi. \tag{9}$$

Сравнивая уравнения (5) и (8) и используя уравнение (9), в силу единственности получим, что

$$p(t, T) = G(t, T, T) \tag{10}$$

и

$$G_T(t,\ \xi,\ T) = -z(T)\, p(t,\ T)\, G(T,\ \xi,\ T). \qquad (11)$$

Следовательно, G удовлетворяет уравнению

$$G_T(t,\ \xi,\ T) = -z(T)\, G(t,\ T,\ T)\, G(T,\ \xi,\ T), \qquad (12)$$

или в силу симметричности G

$$G_T(t,\ \xi,\ T) = -z(T)\, p(t,\ T)\, p(\xi,\ T). \qquad (13)$$

Уравнение (12) называется вариационной формулой Адамара, тогда как в численной процедуре используется формула (13), в которой p рассматривается как внешнее воздействие.

11. Численный пример

Численная процедура основана на уравнениях относительно G, p и r. Прежде всего численно интегрируется уравнение для r от $T = 0$ до $T = \min(t,\ \xi)$. Пусть для определенности $t < \xi$. Таким образом, численное значение $r(t)$ известно. При $T = t$ вводится уравнение для $p(t,\ T)$ и интегрирование продолжается от $T = t$ до $T = \xi$. В этой точке добавляются два уравнения: для $p(\xi,\ T)$ и $G(t,\ \xi,\ T)$, и интегрирование продолжается до $T = T^*$, где T^* — желаемая длина интервала. Тогда $G(t,\ \xi,\ T^*)$ и есть искомая функция Грина.

Чтобы показать эффективность такого подхода, рассмотрим задачу

$$\ddot{x} - k^2 x = -g(t), \quad 0 < t < T, \qquad (1)$$

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(T) = 0, \qquad (2)$$

где k — постоянная. Функция Грина имеет вид

$$G(t,\ \xi,\ T) = \begin{cases} \dfrac{1}{k}\, \dfrac{\operatorname{ch} k(\xi - T)\operatorname{sh} kt}{\operatorname{ch} kT}, & 0 \leqslant t \leqslant \xi, \\[2ex] \dfrac{1}{k}\, \dfrac{\operatorname{sh} k\xi \operatorname{ch} k(t - T)}{\operatorname{ch} kT}, & \xi \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Описанная выше процедура применялась для вычисле-

ния $G(t, \xi, T)$, $T \leqslant 1$, для $k = 10$ на сетке с размером ячейки 0,1 на плоскости (t, ξ). При этом использовалась процедура численного интегрирования Адамса — Мултона с шагом 0,01. За несколько секунд процессорного времени было получено решение с пятью верными значащими цифрами.

12. Нелинейные двухточечные граничные задачи

Основным моментом при решении многих задач является получение численного решения некоторой нелинейной двухточечной граничной задачи. Задачи такого типа естественно возникают в теории оптимального управления и других вариационных задачах, в различных областях астрофизики и биологии. Мы еще вернемся к этим разделам, однако сейчас рассмотрим лишь математические аспекты некоторого класса нелинейных двухточечных граничных задач для того, чтобы продемонстрировать, как можно применить здесь идеи, развитые для линейного случая.

Как можно было ожидать, в случае нелинейных задач отсутствие принципа суперпозиции заставляет несколько пересмотреть нашу методику сведения к задаче Коши. Мы уже не укладываемся в рамки обыкновенных дифференциальных уравнений, поскольку теперь решение, вообще говоря, будет функцией и от заданных граничных условий, и от длины интервала. Это обстоятельство заставляет нас привлекать уравнения с частными производными для определения этих дополнительных переменных. Однако, как будет видно в дальнейшем, возникающие таким образом уравнения с частными производными имеют очень простую структуру, позволяющую привлекать для их решения ряд известных методов. В результате мы можем ожидать, что сведение нелинейных граничных задач к задачам Коши окажется эффективным для широкого класса задач.

Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = F(u, v, t), \tag{1}$$

$$\dot{v} = G(u,\ v,\ t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{2}$$

с граничными условиями

$$u(0) = 0, \tag{3}$$

$$v(T) = c. \tag{4}$$

Предположим ради простоты изложения, что u и v — скалярные функции. Получить многомерный аналог не представит особого труда. Чтобы указать зависимость функций u и v от c, T и t, мы будем писать $u(t,\ c,\ T)$ и $v(t,\ c,\ T)$, когда это будет необходимо.

Продифференцировав уравнения (1)—(4) по c, получим

$$\dot{u}_c(t,\ c,\ T) = F_u u_c + F_v v_c, \tag{5}$$

$$\dot{v}_c(t.\ c,\ T) = G_u u_v + G_v v_c, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{6}$$

$$u_c(0,\ c,\ T) = 0, \tag{7}$$

$$v_c(T,\ c,\ T) = 1. \tag{8}$$

Аналогично дифференцирование по T приводит к уравнениям

$$\dot{u}_T = F_u u_T + F_v v_T, \tag{9}$$

$$\dot{v}_T = G_u u_T + G_v v_T, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{10}$$

$$u_T(0,\ c,\ T) = 0, \tag{11}$$

$$\dot{v}(T,\ c,\ T) + v_3(T,\ c,\ T) = 0. \tag{12}$$

В последнем уравнении $\dot{v}$ обозначает производную по первому аргументу, v_3 — по третьему.

Для использования этих уравнений заметим, что из дифференциального уравнения (2) при $t = T$ получаем

$$\dot{v}(T,\ c,\ T) = G(u(T,\ c,\ T),\ v(T,\ c,\ T),\ T) =$$
$$= G(r(c,\ T),\ c,\ T), \tag{13}$$

где

$$r(c,\ T) = u(T,\ c,\ T). \tag{14}$$

Сравнивая уравнения (5)—(8) с (9)—(12), в предположении существования и единственности решения получаем

$$u_T(t, c, T) = -G(r(c, T), c, T)\, u_c(t, c, T), \tag{15}$$

$$v_T(t, c, T) = -G(r(c, T), c, T)\, v_c(t, c, T), \tag{16}$$

$$0 \leqslant t \leqslant T, \quad |c| < \infty.$$

Уравнения (15) и (16) и являются искомыми уравнениями с частными производными для u и v. Начальные условия при $T = t$ имеют вид

$$u(t, c, t) = r(c, t), \tag{17}$$

$$v(t, c, t) = c. \tag{18}$$

Теперь остается рассмотреть вопрос о вычислении функции r.

Продифференцировав (14) по T, получим

$$r_T(c, T) = \dot{u}(T, c, T) + u_3(T, c, T). \tag{19}$$

Из уравнений (1) и (15) вытекает, что

$$r_T(c, T) = F(r(c, T), c, T) - G(r(c, T), c, T)\, r_c(c, T). \tag{20}$$

Это квазилинейное уравнение первого порядка относительно функции r с частными производными. Из уравнения (3) следует, что

$$r(c, 0) = 0. \tag{21}$$

Уравнения для u, v и r вместе с соответствующими начальными условиями и определяют представление исходной нелинейной задачи в виде задачи Коши.

13. Формулировка задачи Коши

Предположим, что при достаточно малом $T > 0$ функция r определяется как решение задачи Коши

$$r_T = F(r, c, T) - G(r, c, T)\, r_c, \quad T > 0, \tag{1}$$

$$r(c, 0) = 0. \tag{2}$$

Функция u является решением задачи

$$u_T = G(r, c, T) u_c, \quad t < T, \tag{3}$$

$$u(t, c, t) = r(c, T), \tag{4}$$

а функция v есть решение задачи

$$v_T = G(r, c, T) v_T, \quad t < T, \tag{5}$$

$$v(t, c, t) = c. \tag{6}$$

Еще раз отметим, что уравнения следует проинтегрировать лишь в направлении увеличения T. Таким образом, эта процедура относится к одношаговым методам.

14. Вычислительные методы

Опишем кратко несколько методов, которые можно использовать для численного решения приведенных выше уравнений с частными производными первого порядка. Более подробно с этими методами можно познакомиться по литературе, приведенной в конце главы.

Стандартный численный метод решения уравнений с частными производными—это конечно-разностная аппроксимация. Хотя различных конечно-разностных схем почти столько же, сколько и исследователей, все они используют одну принципиальную идею—замену частных производных конечными разностями и анализ получающихся при этом алгебраических задач.

Для примера рассмотрим уравнение (13.1) для отыскания функции r

$$r_T(c, T) = F(r, c, T) - G(r, c, T) r_c, \tag{1}$$

$$r(c, 0) = 0. \tag{2}$$

Переход к простейшей разностной схеме заключается в замене частных производных следующими разностными формулами:

$$r_T(c, T) \cong \frac{r(c, T+\Delta) - r(c, T)}{\Delta}, \tag{3}$$

$$r_c(c, T) \cong \frac{r(c+\delta,\ T) - r(c,\ T)}{\delta}, \quad \Delta, \delta \ll 1. \tag{4}$$

Подставив эти выражения в (1), после простых преобразований получим

$$r(c, T+\Delta) = r(c, T) + \Delta \Big\{F(r, c, T) - \\ - G(r, c, T)\left[\frac{r(c+\delta,\ T) - r(c,\ T)}{\delta}\right]\Big\}, \tag{5}$$

$$r(c, 0) = 0. \tag{6}$$

Уравнение (5) вместе с граничными условиями (6), заданными на прямой, позволяют выразить значения функции r на прямой $T+\Delta$ через ее значения на прямой T. Можно показать, что при выполнении соответствующих предположений о F, G и отношении Δ/δ разностная аппроксимация сходится к решению исходной задачи при $\Delta,\ \delta \to 0$.

Аппроксимация (3), (4), вообще говоря, справедлива с точностью до членов порядка Δ или δ. Это не очень высокая точность, и потому имеет смысл обратиться к более точным схемам. Существует ряд схем, которые ценой незначительного увеличения числа вычислений обеспечивают существенно лучшую точность. Так, например, аппроксимация r_T и r_c центральными разностями

$$r_T(c, T) \cong \frac{r(c,\ T+\Delta) - r(c,\ T-\Delta)}{2\Delta}, \tag{7}$$

$$r_c(c, T) \cong \frac{r(c+\delta,\ T) - r(c-\delta,\ T)}{2\delta} \tag{8}$$

дает ошибку порядка Δ^2 и δ^2 соответственно. Аналогично можно построить схемы более высокого порядка. Как и в случае центральных разностей, в схемах более высокого порядка граничных условий, заданных на одной прямой, оказывается недостаточно для начала вычислений. Поэтому обычно необходимо применять схему низкого порядка для получения начальных условий, необходимых для начала работы более точных схем. Примеры подобного рода можно найти в литературе, указанной в конце главы.

Другой подход к решению задачи (1) заключается в применении разложения в степенные ряды. Хотя степенные ряды многие годы использовались в теории дифференциальных уравнений как аналитический инструмент, их применение для вычислительных целей сдерживалось в основном ограниченностью области сходимости и низкой скоростью сходимости. Однако в задачах типа (1), в особенности в том случае, когда функции F и G являются многочленами, существует ряд способов увеличения скорости сходимости и расширения области применимости степенного представления функции r. Такой подход к решению особенно оправдан, когда требуется получить функцию r только для небольшого числа значений c и T.

Для иллюстрации применения степенных рядов представим функцию r в виде

$$r(c, T) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} c^i T^j. \qquad (9)$$

Предположим далее, что функции F и $r_c G$ можно разложить в ряды следующим образом:

$$F(r, c, T) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} c^i T^j, \qquad (10)$$

$$r_c G(r, c, T) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} d_{ij} c^i T^j, \qquad (11)$$

где числа $\{b_{ij}\}$ и $\{d_{ij}\}$ зависят от $\{a_{ij}\}$ благодаря специфическому виду F и G. Продифференцировав (9) и подставив в уравнение (1), получим

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) a_{i,\, j+1} c^i T^j = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} b_{ij} c^i T^j -$$

$$- \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} d_{ij} c^i T^j. \qquad (12)$$

Приравнивая коэффициенты при $c^i T^j$, приходим к рекуррентному соотношению

$$(j+1)\, a_{i,\, j+1} = b_{ij} - d_{ij}, \qquad i, j = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (13)$$

Полученное из уравнения (2) начальное условие имеет вид

$$a_{i0} = 0, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (14)$$

Используя уравнения (13) и (14), можно с помощью ЭЦВМ легко получить коэффициенты разложения $\{a_{ij}\}$. Взяв достаточно большое число членов ряда (9), можно получить хорошее приближение к функции r для достаточно малого значения $|c| + |T|$. Если при некоторых значениях c или T в (9) имеются особые точки, то следует воспользоваться процедурами аналитического продолжения.

Третий метод решения уравнения (1) — это конечно-разностная схема, называемая дифференциальной квадратурной формулой. В этой процедуре производные по всем переменным, кроме одной, заменяются соответствующими линейными комбинациями значений функции. Таким образом, задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с известными начальными значениями.

В качестве примера представим r_c на множестве точек $\{c_i\}$ приближенным выражением

$$r_c(c_i, T) \cong \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\, r(c_j, T). \qquad (15)$$

Предположим для простоты, что $0 \leqslant c_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, N$, и определим $\{a_{ij}\}$ таким образом, чтобы формула (15) была точной для многочленов степени меньше N. С помощью тестовых функций c^i, $i = 1, 2, \ldots, N$, обращение матрицы Вандермонда дает точное значение коэффициентов разложения. Чтобы избежать обращения матрицы, можно использовать тестовые многочлены $r(c, T) = \dfrac{P_N^*(c)}{(c - c_i)\, P_N^{*\prime}(c_i)}$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Здесь P_N^* есть

N-й смещенный полином Лежандра, а c_i—его i-й корень. Множество $\{P_N^*\}$ ортогонально на $[0,1]$, и поэтому коэффициенты разложения $\{a_{ij}\}$ можно непосредственно выразить через корни P_N^* и $P_N^{*'}$. В результате получим

$$a_{ik} = \begin{cases} \dfrac{P_N^{*'}(c_i)}{(c_i - c_k)\, P_N^{*'}(c_k)}, & i \neq k, \\[2ex] \dfrac{1 - 2c_k}{2c_k\,(c_k - 1)}, & i = k. \end{cases} \tag{16}$$

Используя обозначения

$$r(c_i, T) = r_i(T), \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{17}$$

и подставляя (15) в (1), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$r_i'(T) = F(r_i, c_i, T) - G(r_i, c_i, T) \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\, r_j(T), \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{18}$$

с начальными условиями

$$r_i(0) = 0. \tag{19}$$

Уравнения (18) — (19) и представляют собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, удобную для определения функций $r_i(T)$.

15. Обоснование задачи Коши

На данном этапе важно установить, эквивалентна ли описанная в § 13 задача Коши исходной нелинейной двухточечной граничной задаче. Наше главное предположение заключается в том, что длина интервала T достаточно мала, а функции F и G достаточно гладкие, так что задача Коши обладает единственным решением.

Рассмотрим прежде всего уравнение (13.3) с начальным условием (13.4). Продифференцировав обе части (13.3) по t, получим

$$\dot{u}_T(t, c, T) = G(r, c, T)\,\dot{u}_c(t, c, T), \qquad t < T. \tag{1}$$

Аналогично, продифференцировав уравнение (13.4) по t, получим

$$r_t(c, t) = \dot{u}(t, c, t) + u_3(t, s, t) =$$
$$= \dot{u}(t, c, t) + G(r(c, t), c, t)\,r_c(c, t). \tag{2}$$

В силу уравнения (13.1)

$$r_t(c, t) = F(r(c, t), c, t) - G(r(c, t), c, t)\,r_c(c, t). \tag{3}$$

Отсюда получаем

$$\dot{u}(t, c, t) = F(r(c, t), c, t). \tag{4}$$

Уравнения (1) и (4) образуют задачу Коши для определения функции $\dot{u}(t, c, T)$.

Рассмотрим далее функцию $F(u, v, T)$. Продифференцировав ее, увидим, что

$$F_T = F_u u_T + F_v v_T, \tag{5}$$

$$F_c = F_u u_c + F_v v_c, \tag{6}$$

$$F_T - GF_c = F_u[u_T - Gu_c] + F_v[v_T - Gv_c], \tag{7}$$

отсюда в силу уравнений (13.3) и (13.5) вытекает

$$F_T - GF_c = 0. \tag{8}$$

Кроме того, при $T = t$

$$F(u(t, c, t), v(t, c, t), t) = F(r(c, t), c, t). \tag{9}$$

Таким образом, мы видим, что функции $\dot{u}(t, c, T)$ и $F(u(t, c, T), v(t, c, T), t)$ удовлетворяют одной и той же задаче Коши при $T \geqslant t$. Из предположения единственности вытекает, что

$$\dot{u}(t, c, T) = F(u(t, c, T), v(t, c, T), t). \tag{10}$$

Аналогично можно показать, что и функции $\dot{v}(t, c, T)$ и

$G(u(t, c, T), v(t, c, T), t)$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению.

Остается рассмотреть граничные условия на функции u и v. Функция v строится таким образом, что $v(T, c, T) = c$, $T > 0$. Наконец, покажем, что

$$u(0, c, T) = 0. \tag{11}$$

Функция $u(0, c, T)$ удовлетворяет уравнению с частными производными

$$u_T(0, c, T) = G(r(c, T), c, T)\, u_c(0, c, T), \quad T > 0, \tag{12}$$

с начальным условием

$$u(0, c, 0) = r(c, 0) = 0. \tag{13}$$

Таким образом, в силу единственности $u(0, c, T) \equiv 0$ является единственным решением для (12)—(13), что и завершает доказательство эквивалентности задач.

Замечания и литература

§ 2. Вывод задачи Коши из геометрических соображений для случая более сильных граничных условий дан в работе

Беллман, Кагивада, Калаба (Bellman R., Kagiwada H., Kalaba R.), Invariant imbedding and the numerical integration of boundary value problems for unstable linear systems of ordinary differential equations, *Comm. ACM*, 10, (1967), 100—102.

Соответствующие результаты для задачи Коши, а также численные примеры приведены в статье

Скотт (Scott M.), Numerical solutions of unstable initial value problems by invariant imbedding, Sandia Laboratories, Research Rept. SC — RR — 69 —343, August, 1969.

Многочисленные результаты из области химической технологии и теории оценивания можно найти в книге

Ли (Lee E. S.), Quasilinearization and invariant imbedding, Academic Press, New York, 1968.

§ 4. Классическими работами по теории устойчивости обыкновенных дифференциальных уравнений являются

Беллман Р., Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1954.

Ла-Саль Ж., Лефшец С., Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, изд-во «Мир», М., 1964.

Вопросы численной неустойчивости обсуждаются в книгах

Бабушка И., Витасек Е., Прагер М., Численные процессы решения дифференциальных уравнений, изд-во «Мир», М., 1969.

Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1953.

§ 6. Более глубокие результаты, а также примеры обобщения Канторовича процедуры Релея — Ритца см.

Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, М. — Л., 1962.

§ 9. Численные примеры с использованием анологичных методов приведены в статье

Хасс, Калаба (Huss R., Kalaba R.), Invariant imbedding and the numerical determination of Green's functions, *J. Opt. Theory and Appl.*

Результаты, касающиеся определения функции Грина и собственных значений, можно найти в работах

Кагивада, Калаба, Шумицки, Сридхар (Kagiwada H., Kalaba R., Schumitzky A., Sridhar R.), An integral equation and a representation for a Green's function, *J. Math. Anal. Appl.*, 2 (1968), 226 — 229.

Скотт, Шэмпайн, Винг (Scott M., Shampine L., Wing G.), Invariant imbedding and the calculation of eigenvalues for Sturm — Liouville systems, *Computing*, 4, (1969), 10 — 23.

§ 12. Эти результаты впервые получены в статье

Кагивада, Калаба (Kagiwada H., Kalaba R.), Derivation and validation of an initial value method for certain nonlinear two-point boundary value problems, *J. Opt. Theory and Appl.*, 6 (1968), 378—385.

§ 14. Подробное обсуждение различных конечно-разностных схем см.

Рихтмайер Р., Мортон К., Разностные методы решения краевых задач, изд-во «Мир», М., 1972.

См. также книгу Коллатца, рекомендованную выше к § 4. Применение степенных рядов к задачам Коши и граничным задачам обсуждается в работах

Касти (Casti J.), Power series and the numerical treatment of initial value problems, The RAND Gorp., RM — 6059 — PR, Sept., 1969.

Левитт (Leavitt J.), A power series method for solving nonlinear boundary value problems, *Quart. Appl. Math.*, 27 (1969), 67—77.

Применение методов дифференциальных квадратур вместе с численными примерами описано в работе

Беллман, Касти, Кашеф (Bellman R., Casti J., Kashef B.), Differential quadrature: A new technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations, *J. Comp. Physics*, 10, (1972), 40—52.

Глава 4

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

1. Введение

Учитывая, что теория инвариантного погружения с успехом справляется с двухточечными граничными задачами, и имея в виду тесную связь этих задач с интегральными уравнениями Фредгольма, попробуем теперь применить наши процедуры к различным типам линейных интегральных уравнений. Центральным объектом наших исследований будет интегральное уравнение типа уравнений в свертках

$$u(t)=g(t)+\int_0^c k(\,|\,t-y\,|\,)\,u(y)\,dy, \tag{1}$$

которое возникает в теории оптимальной фильтрации, химии полимеров, распространении излучения и многих других областях физики и техники.

Прежде всего мы покажем, что введением некоторого подходящего параметра погружения можно выразить решение уравнения (1) через дополнительную функцию Ф. При выводе формулы для представления функции u через Ф будут получены некоторые неклассические результаты, касающиеся резольвенты Фредгольма.

Далее будет описан один численный метод решения уравнения (1) с помощью уравнений погружения и приведен наглядный пример.

Затем будет изложено доказательство того, что введенная задача Коши действительно дает решение задачи (1). По ходу доказательства будет введено несколько новых функций, которые представляют интерес сами по себе.

Наконец, в завершение главы мы рассмотрим различные вопросы теории интегральных уравнений и ее связи

с теорией инвариантного погружения. Мы увидим, что собственные функции и собственные значения могут быть вычислены из уравнений погружения и что с помощью задачи Коши можно вычислить резольвенту Фредгольма. Тесная связь между идеей погружения и этими хорошо изученными областями классического анализа открывает путь для гораздо более глубокого понимания теории инвариантного погружения.

2. Основная задача

Чтобы упростить изложение основных идей насколько это возможно и тем не менее покрыть широкий класс нетривиальных и важных задач, пока ограничимся рассмотрением интегрального уравнения Фредгольма

$$u(t) = g(t) + \int_0^c k(\,|\,t - y\,|\,)\,u(y)\,dy, \tag{1}$$

где ядро k представимо в виде

$$k(r) = \int_0^1 e^{-r/z'}\,w(z')\,dz', \qquad r > 0. \tag{2}$$

Более того, будем предполагать, что функция $w(z)$ такова, что уравнение (1) обладает единственным решением на интервале $0 \leqslant t \leqslant c$ для всех непрерывных внешних воздействий $g(t)$.

3. Погружение

По аналогии с двухточечной граничной задачей постараемся погрузить уравнение (1) в семейство задач, для которого можно вывести соотношения, связывающие соседние члены этого семейства, и такое, что для него можно найти соответствующее «начальное условие».

4. Производящая функция

Для получения решения задачи (2.1) мы привлекаем одно из мощных средств анализа — производящую функцию. Мы постараемся получить некоторую функцию,

которую можно вычислить и через которую может быть выражено решение семейства интегральных уравнений.

Пусть функция $\Phi(t, x)$ определяется интегральным уравнением

$$\Phi(t, x) = k(x - t) + \int_0^x k(|t - y|)\Phi(y, x)\,dy,$$

$$0 \leqslant t \leqslant x. \quad (1)$$

Определим, кроме того, функцию f формулой

$$f(x) = g(x) + \int_0^x \Phi(y, x)g(y)\,dy, \qquad x \geqslant 0. \quad (2)$$

Тогда мы утверждаем, что решение семейства интегральных уравнений

$$u(t, x) = g(t) + \int_0^x k(|t - y|)u(y, x)\,dy, \quad x \geqslant t \quad (3)$$

выражается формулой

$$u(t, x) = f(t) + \int_t^x \Phi(t, y)f(y)\,dy, \qquad 0 \leqslant t \leqslant x. \quad (4)$$

Доказательство проводится очень просто. Продифференцировав обе части уравнения (3) по x, получим

$$u_x(t, x) = k(x - t)u(x, x) + \int_0^x k(|t - y|)u_x(y, x)\,dy. \quad (5)$$

Рассматривая уравнение (5) как интегральное уравнение относительно функции $u_x(t, x)$, видим, что его решением является

$$u_x(t, x) = \Phi(t, x)u(x, x), \qquad 0 \leqslant t \leqslant x. \quad (6)$$

Проинтегрировав это уравнение, приходим к уравнению

$$u(t, x) = u(t, t) + \int_t^x \Phi(t, y)u(y, y)\,dy. \quad (7)$$

Для $u(x, x)$ можно записать

$$u(x, x) = g(x) + \int_0^x k(x-y)\, u(y, x)\, dy. \tag{8}$$

Перемножив уравнения (1) и (3) крест на крест, проинтегрировав полученное равенство от $t=0$ до $t=x$ и воспользовавшись симметрией ядра k, получаем

$$\int_0^x \Phi(t, x)\, g(t)\, dt = \int_0^x u(t, x)\, k(x-t)\, dt. \tag{9}$$

Таким образом, уравнение (8) принимает вид

$$u(x, x) = g(x) + \int_0^x \Phi(t, x)\, g(t)\, dt, \qquad x \geqslant 0. \tag{10}$$

Тогда уравнение (7) приводится к виду

$$u(t, x) = g(t) + \int_0^t \Phi(t', t)\, g(t')\, dt' + \\ + \int_t^x \Phi(t, y)\left[g(y) + \int_0^y \Phi(t', y)\, g(t')\, dt'\right] dy = \\ = f(t) + \int_t^x \Phi(t, y)\, f(y)\, dy, \tag{11}$$

что и требовалось доказать.

5. Уравнение Беллмана—Крейна

Приведенная выше производящая формула позволяет дать элегантный вывод формулы Беллмана—Крейна для резольвенты ядра уравнения (4.3).

Напомним, что резольвента K дает решение уравнения (4.3) в виде

$$u(t, x) = g(t) + \int_0^x K(t, y, x)\, g(y)\, dy, \qquad 0 \leqslant t \leqslant x. \tag{1}$$

Известно, что резольвента удовлетворяет интегральному уравнению

$$K(t, y, x) = k(\,|\,t-y\,|\,) + \int_0^x k(\,|\,t-y'\,|\,)\,K(y', y, x)\,dy'. \qquad (2)$$

Сравнивая уравнение (2) с уравнением (4.1) для Ф, видим, что

$$\Phi(t, x) = K(t, x, x) = K(x, t, x), \qquad (3)$$

где мы воспользовались известным свойством симметрии

$$K(t, y, x) = K(y, t, x). \qquad (4)$$

Для применения производящей функции положим в уравнении (4. 3)

$$g(t) = k(\,|\,t-y'\,|\,). \qquad (5)$$

Известно, что решением u является резольвента

$$u(t, x) = K(t, y', x). \qquad (6)$$

Используя производящую функцию, из уравнения (4.11) получаем

$$K(t, y, x) = \Phi(y, t) + \int_t^x \Phi(t, z)\,\Phi(y, z)\,dz,$$

$$0 \leqslant y \leqslant t \leqslant x. \qquad (7)$$

Наконец, продифференцировав это равенство по x, приходим к формуле Беллмана — Крейна

$$K_x(t, y, x) = \Phi(t, x)\,\Phi(y, x), \qquad (8)$$

показывающей, как изменяется резольвента в зависимости от длины интервала.

Формула Беллмана — Крейна играет важную роль во многих теоретических исследованиях в области интегральных уравнений и, как мы увидим далее, оказывается чрезвычайно полезной при выводе соответствующей задачи Коши.

6. Вычисление функции $\Phi(t, x)$

Выражения (5. 6) и (5.7) для $u(t, x)$ показывают, что для получения решения семейства интегральных уравнений необходимо лишь знание функции $\Phi(t, x)$. Для получения уравнений для определения Φ введем новые функции $J(t, x, z)$, $X(x, z)$ и $Y(x, z)$, определенные равенствами

$$J(t, x, z) = e^{-(x-t)/z} + \int_0^x k(|t-y|) J(y, x, z)\, dy,$$

$$x \geqslant t, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1, \tag{1}$$

$$X(x, z) = J(x, x, z), \quad x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1, \tag{2}$$

$$Y(x, z) = J(0, x, z), \quad x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1. \tag{3}$$

Используя аналитическое выражение для ядра (уравнение (2.2)), умножим уравнение (1) на функцию $w(z)$ и затем проинтегрируем обе части от $z = 0$ до $z = 1$. В результате получим основное соотношение

$$\Phi(t, x) = \int_0^1 J(t, x, z') w(z')\, dz', \quad x \geqslant t. \tag{4}$$

Итак, видно, что для получения Φ достаточно знать функцию $J(t, x, z)$.

Попытаемся поэтому построить прежде всего задачу Коши для функции J. Как будет ясно из дальнейшего, функции X и Y также сыграют свою роль.

7. Задачи Коши для функции J

Прежде всего продифференцируем уравнение (6.1) по x; тогда

$$J_x(t, x, z) = -\frac{1}{z} e^{-(x-t)/z} + k(x-y) J(x, x, z) +$$

$$+ \int_0^x k(|t-y|) J_x(y, x, z)\, dy, \quad x \geqslant t, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1. \tag{1}$$

Рассматривая (1) как интегральное уравнение относительно $J_x(t, x, z)$ и вспоминая уравнения (6.1) и (4.1) для функций J и Φ, запишем J_x в виде

$$J_x(t, x, z) = -\frac{1}{z} J(t, x, z) + X(x, z)\,\Phi(t, x). \qquad (2)$$

В силу (6.4) это уравнение принимает вид

$$J_x(t, x, z) = -\frac{1}{z} J(t, x, z) + \\ + X(x, z) \int_0^1 J(t, x, z')\,w(z')\,dz'. \qquad (3)$$

Из определения функции $X(x, z)$ (уравнение (6.2)) следует, что соответствующее начальное условие для уравнения (3) выглядит так:

$$J(t, t, z) = X(t, z). \qquad (4)$$

Итак, функцию J можно определить, если есть способ определения X. Именно этой задаче и посвящены несколько следующих параграфов.

8. Первый способ вывода уравнения для X

По определению функции $X(x, z)$ имеем

$$X(x, z) = J(x, x, t) = 1 + \int_0^x k(x-y)\,J(y, x, z)\,dy, \\ x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1. \qquad (1)$$

Обозначим через $J_1(t, x, z)$ производную J по первому аргументу. Тогда, продифференцировав (1) по x, получим

$$\frac{d}{dx} X(x, z) = \frac{d}{dx} J(x, x, z) = \\ = [J_1(t, x, z) + J_x(t, x, z)]_{t=x}. \qquad (2)$$

Однако в уравнении (7.2) мы уже получили функцию $J_x(t, x, z)$, поэтому остается лишь найти $J_1(t, x, z)$.

Для этого запишем интегральное уравнение относительно J в виде

$$J(t, x, z) = e^{-(x-t)/z} + \int_0^t k(t-y) J(y, x, z)\, dy + \\ + \int_t^x k(y-t) J(y, x, z)\, dy. \qquad (3)$$

Продифференцируем далее (3) по t. В результате получим

$$J_1(t, x, z) = \frac{1}{z} e^{-(x-t)/z} + k(0) J(t, x, z) + \\ + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} k(t-y) J(y, x, z)\, dy - k(0) J(t, x, z) - \\ - \int_t^x \frac{\partial}{\partial t} k(t-y) J(y, x, z)\, dy = \\ = \frac{1}{z} e^{-(x-t)/z} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} k(t-y) J(y, x, z)\, dy - \\ - \int_t^x \frac{\partial}{\partial t} k(y-t) J(y, x, z)\, dy, \\ x \geqslant t,\ 0 \leqslant z \leqslant 1. \qquad (4)$$

Проинтегрировав по частям последние два интеграла в (4), приходим к соотношению

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} k(t-y) J(y, x, z)\, dy = -k(0) J(t, x, z) + \\ + k(t) J(0, x, z) + \int_0^t k(t-y) J_1(y, x, z)\, dy, \qquad (5)$$

$$\int_t^x \frac{\partial}{\partial t} k(y-t) J(y, x, z)\, dy = -k(0) J(t, x, z) +$$

$$+ k(x-t) J(x, x, z) - \int_t^x k(y-t) J_1(y, x, z)\, dy. \qquad (6)$$

Комбинируя равенства (4) — (6), получим

$$J_1(t, x, z) = \frac{1}{z} e^{-(x-t)/z} + k(t) J(0, x, z) -$$

$$-k(x-t) J(x, x, z) + \int_0^x k(|t-y|) J_1(y, x, z)\, dy. \qquad (7)$$

Рассматривая (7) как интегральное уравнение относительно функции J_1 и учитывая уравнения для Φ, X и Y, получим окончательно

$$J_1(t, x, z) = \frac{1}{z} J(t, x, z) + Y(x, z) \Phi(x-t, x) +$$

$$+ X(x, z) \Phi(t, x). \qquad (8)$$

Возвращаясь к уравнению (2) и учитывая (6.3), запишем окончательное уравнение для $X(x, z)$ в виде

$$\frac{d}{dx} X(x, z) = \frac{1}{z} J(x, x, z) + Y(x, z) \Phi(0, x) -$$

$$-X(x, z) \Phi(x, x) + \left[-\frac{1}{z} J(x, x, z) +\right.$$

$$\left.+ X(x, z) \Phi(x, x)\right] =$$

$$= Y(x, z) \Phi(0, x) =$$

$$= Y(x, z) \int_0^1 Y(x, z') w(z')\, dz', \quad x > 0. \qquad (9)$$

Полагая $t = 0$ в уравнении (7.2), сразу получим задачу Коши для функции Y. Подстановка дает

$$\frac{d}{dx} Y(x, z) = -\frac{1}{z} Y(x, z) + X(x, z) \Phi(0, x) =$$

$$= -\frac{1}{z} Y(x, z) + X(x, z) \int_0^1 Y(x, z') w(z') \, dz', \quad x > 0. \quad (10)$$

Уравнения (9) и (10) образуют пару интегро-дифференциальных уравнений для функций X и Y. По определению этих функций начальные условия при $x = 0$ имеют вид

$$X(0, z) = Y(0, z) = 1. \quad (11)$$

Эти уравнения замыкают систему Коши для функций J, X и Y.

9. Иной вывод уравнения для функции X

Здесь мы воспользуемся специальным видом ядра интегрального уравнения (2.1) для совершенно иного способа вывода задачи Коши для функции X.

Поскольку функция X по определению равна $J(x, x, z)$, будем рассматривать интегральное уравнение для J. Вспомним, что J удовлетворяет интегральному уравнению

$$J(t, x, z) = e^{-(x-t)/z} + \int_0^x k(|t-y|) J(y, x, z) \, dy,$$

$$x \geqslant t, \ 0 \leqslant z \leqslant 1. \quad (1)$$

Заменив в уравнении (1) t на $x-t$ и y на $x-y$, получим новое интегральное уравнение для функции $J(x-t, x, z)$:

$$J(x-t, x, z) = e^{-t/z} + \\ + \int_0^x k(|t-y|) J(x-y, x, z) \, dy, \quad x \geqslant t. \quad (2)$$

Продифференцировав это уравнение по x, приходим к уравнению

$$\frac{d}{dx} J(x-t, x, z) = k(x-y) J(0, x, z) +$$

$$+\int_0^x k(|t-y|)\,\frac{d}{dx}J(x-y,\,x,\,z)\,dy. \qquad (3)$$

Уравнение (3) является интегральным уравнением для функции $\frac{d}{dx}J(x-t,\,x,\,z)$, решение которого определяется выражением

$$\frac{d}{dx}J(x-t,\,x,\,z)=J(0,\,x,\,z)\,\Phi(t,\,x)=$$

$$=Y(x,\,z)\int_0^1 J(t,x,z')\,w(z')\,dz'. \qquad (4)$$

Положив в этом уравнении $t=0$, получим нужный результат

$$\frac{d}{dx}X(x,\,z)=Y(x,\,z)\int_0^1 Y(x,\,z')\,w(z')\,dz'. \qquad (5)$$

Уравнение для Y и начальные условия при $x=0$ получаются, как и ранее.

10. Окончательный вид задачи Коши

Сейчас удобно подытожить полученные ранее результаты. Начнем с интегрального уравнения для J

$$J(t,\,x,\,z)=e^{-(x-t)/z}+\int_0^x k(|t-y|)\,J(y,\,x,\,z)\,dy,$$

$$x\geqslant t,\quad 0\leqslant z\leqslant 1. \qquad (1)$$

Функция J удовлетворяет задаче Коши

$$J_x(t,\,x,\,z)=-\frac{1}{z}J(t,\,x,\,z)+$$

$$+X(x,\,z)\int_0^1 J(t,\,x,\,z')\,w(z')\,dz' \qquad (2)$$

с начальным условием при $x = t$

$$J(t, t, z) = X(t, z). \tag{3}$$

Функция $X(x, z)$ получается в результате решения системы интегро-дифференциальных уравнений

$$X_x(x, z) = Y(x, z) \int_0^1 Y(x, z')\, w(z')\, dz', \tag{4}$$

$$Y_x(x, z) = -\frac{1}{z} Y(x, z) + \\ + X(x, z) \int_0^1 Y(x, z')\, w(z')\, dz', \quad x > 0. \tag{5}$$

Начальные условия для X и Y при $x = 0$ определяются так:

$$X(0, z) = Y(0, z) = 1. \tag{6}$$

Как было отмечено ранее, теперь можно получить функцию $\Phi(t, x)$, воспользовавшись соотношением

$$\Phi(t, x) = \int_0^1 J(t, x, z')\, w(z')\, dz'. \tag{7}$$

11. Процедура решения

Для численного применения уравнений для X, Y и J интегро-дифференциальные уравнения (10.2), (10.4) и (10.5) аппроксимируются системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Один из эффективных методов при такой аппроксимации состоит в замене интегралов конечными суммами с применением квадратурных схем. Пусть, например, $f(x)$ — функция, интегрируемая на $[0,1]$. Запишем тогда

$$\int_0^1 f(x)\, dx \cong \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\, \alpha_i, \tag{1}$$

где числа $\{x_i\}_{i=1}^N$ и $\{\alpha_i\}_{i=1}^N$ — абсциссы и веса квадратур-

ной формулы соответственно. В случае квадратурной формулы Гаусса x_i является i-м корнем смещенного полинома Лежандра $P_N^*(x)$, определяемого как

$$P_N^*(x) = P_N(1-2x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2}$$

где $P_N(x)$ — полином Лежандра степени N, заданный на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Числа $\{\alpha_i\}$ в этом случае являются соответствующими весами Кристоффеля. Таблицы корней и весов можно найти во многих справочниках по математике.

Применение этого подхода к уравнениям для X, Y и J приводит к новой системе

$$X_i'(x) = Y_i(x) \sum_{j=1}^{N} Y_j(x) w_j, \quad x \geqslant 0, \tag{3}$$

$$Y_i'(x) = -\frac{1}{z_i} Y_i(x) + X_i(x) \sum_{j=1}^{N} Y_j(x) w_j, \quad x \geqslant 0, \tag{4}$$

$$J_i'(t, x) = -\frac{1}{z_i} J_i(t, x) + X_i(x) \sum_{j=1}^{N} J_j(t, x) w_j, \quad x \geqslant t, \tag{5}$$

где приняты следующие обозначения:

$$X_i(x) = X(x, z_i), \tag{6}$$

$$Y_i(x) = Y(x, z_i), \tag{7}$$

$$J_i(t, x) = J(t, x, z_i), \tag{8}$$

$$w_i = w(z_i)\alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{9}$$

Начальные условия имеют вид

$$X_i(0) = 1, \tag{10}$$

$$Y_i(0) = 1, \tag{11}$$

$$J_i(t, t) = X_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{12}$$

Уравнения (3) — (5) вместе с начальными условиями (10) — (12) образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которую мы будем использовать при численном решении.

12. Численные примеры

Для иллюстрации описанных выше идей рассмотрим интегральное уравнение, возникающее в задаче распространения излучения,

$$s(t) = \frac{\lambda}{4} e^{-(x-t)/\mu} + \frac{\lambda}{2} \int_0^x E_1(\mid t - t' \mid) s(t')\, dt', \qquad (1)$$

где ядро является интегральной показательной функцией

$$E_1(r) = \int_0^1 e^{-r/z'} dz'/z', \quad r > 0. \qquad (2)$$

Предположим для определенности, что параметры имеют следующие значения: $\lambda = 0{,}5$; $x = 0{,}3$; $\mu = 0{,}5$. Тогда функция $w(z)$ в данном примере равна $w(z) = 1/4z$, а внешнее воздействие есть $\exp[-2(0{,}3 - t)]/8$.

Численное решение задачи получено на ЦЭВМ с помощью программы, приведенной в приложении. Все интегралы вычислялись с помощью квадратурной формулы Гаусса седьмого порядка, а для интегрирования системы Коши от $x = 0$ до $x = 0{,}3$ использовалась процедура интегрирования Адамса — Мултона четвертого порядка. Шаг интегрирования был принят равным $\Delta = 0{,}005$. В таблице 1 приведены результаты вычислений по нашему методу и результаты, полученные Соболевым и Мининым для этой же задачи.

Ранее было показано, что резольвента $K(t, y, x)$ является решением некоторой задачи Коши, а именно уравнения Беллмана — Крейна. Напомним, что это уравнение имеет вид

$$K_x(t, y, x) = \Phi(y, x)\Phi(t, x), \text{ при } x \geqslant t, \qquad (3)$$

с начальным условием при $x = y$

$$K(t, y, y) = \Phi(t, y). \qquad (4)$$

Таблица 1

Решение задачи для значений

$\lambda = 0{,}5;\ x = 0{,}3;\ \mu = 0{,}5$

t	Инвариантное погружение	Решение Соболева и Минина
0,0	0,082559	0,083
0,1	0,102958	0,103
0,2	0,122851	0,123
0,3	0,140966	0,141

Использование уравнений для X, Y и J позволяет вычислить резольвентное ядро K таким же образом, что и выше. Рассмотрим, например, уравнение

$$u(t) = g(t) + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-|t-y|}\, u(y)\, dy, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{5}$$

Введем переменную длины интервала интегрирования x. В интересующем нас случае $x = 1$. В данном примере параметр z принимает единственное значение $z = 1$. Тогда функция J удовлетворяет интегральному уравнению

$$J(t, x) = e^{-(x-t)} + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-|t-y|}\, J(y, x)\, dy. \tag{6}$$

Между $J(t, x)$ и $\Phi(t, x)$ имеет место соотношение $\Phi(t, x) = \frac{1}{2} J(t, x)$. При $x = 1$ решение в явном виде есть

$$J(t) = \frac{2}{3}(1 + t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{7}$$

При $x = 1$ интегральное уравнение для K имеет вид

$$K(t, y) = \frac{1}{2} e^{-|t-y|} + \frac{1}{2}\int_0^1 K(t, t')\, e^{-|t'-t|}\, dt'. \tag{8}$$

Считая y переменной, а t постоянным, продифференцируем обе части (8) по y. Вторая производная K_{yy} равна нулю, поэтому K линейна по y. Однако в точке $y=t$ $K_y(y, t)$ терпит разрыв:

$$\lim_{y \to t^-} K_y(t, y) - \lim_{y \to t^+} K_y(t, y) = 1. \tag{9}$$

Используя это соотношение, непрерывность K при $y=t$ и соотношения

$$K(t, 1) = \Phi(t) = \frac{1}{2} J(t) = \frac{1}{3}(1+t) \tag{10}$$

и

$$K(t, 0) = \Phi(1-t) = \frac{1}{2} J(1-t) = \frac{1}{3}(2-t), \tag{11}$$

получим аналитическое выражение для K

$$K(t, y) = \begin{cases} \frac{1}{3}(2-t) + \frac{1}{3}(2-t)y, & y<t, \\ \frac{2}{3}(1+t) - \frac{1}{3}(1+t)y, & t<y, \end{cases} \tag{12}$$

при длине интервала $x=1$. Уравнение (12) мы будем использовать для контроля счета.

Прежде всего функции X и Y можно получить, проинтегрировав уравнения

$$\dot{X}(x) = \frac{1}{2} X(x) Y(x), \quad X(0) = 1, \tag{13}$$

$$\dot{Y}(x) = -Y(x) + \frac{1}{2} X(x) Y(x), \quad Y(0) = 1, \tag{14}$$

от $x=0$ до $x=t_1$. Далее вводятся начальные условия при $x=t_1$

$$J(t_1, t_1) = X(t_1), \tag{15}$$

$$K(t_1, t_1, t_1) = \Phi(t_1, t_1) = \frac{1}{2} X(t_1), \tag{16}$$

и к имеющимся уравнениям добавляются еще два:

$$\dot{J}(t_1, x) = -J(t_1, x) + \frac{1}{2} X(x) J(t_1, x), \tag{17}$$

$$\dot{K}(t_1, t_1, x) = \frac{1}{2} J(t_1, x) - \frac{1}{2} J(t_1, x). \tag{18}$$

Объединенная система уравнений интегрируется затем до $x = t_2$. Далее накладываются новые условия

$$J(t_2, t_2) = X(t_2), \tag{19}$$

$$K(t_1, t_2, t_2) = \Phi(t_1, t_2) = \frac{1}{2} J(t_1, t_2), \tag{20}$$

$$K(t_3, t_2, t_2) = \Phi(t_2, t_2) = \frac{1}{2} X(t_2) \tag{21}$$

и вводятся новые дифференциальные уравнения

$$\dot{J}(t_2, x) = -J(t_2, x) + \frac{1}{2} X(x) J(t_2, x), \tag{22}$$

$$\dot{K}(t_1, t_2, x) = \frac{1}{2} J(t_1, x) \cdot \frac{1}{2} J(t_2, x), \tag{23}$$

$$\dot{K}(t_2, t_2, x) = \frac{1}{2} J(t_2, x) \cdot \frac{1}{2} J(t_2, x). \tag{24}$$

Расширенная система интегрируется далее до $x = t_3$ и процедура повторяется. В конце концов интегрируется система из $2 + (2 + 3 + \ldots + N + 1)$ уравнений до $x = 1,0$. При этом вычисляется только треугольная матрица $K(t_i, t_j, x)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, $i = 1, 2, \ldots, j$, поскольку остальные элементы получаются из условия симметричности $K(t_i, t_j, x) = K(t_j, t_i, x)$.

Численные результаты подтверждают эффективность описанной выше схемы. С помощью квадратурной формулы Гаусса седьмого порядка резольвентное ядро вычисляется с точностью шести значащих цифр. Время вычислений на IBM 7044 составляет 5 — 10 сек. для двухсот шагов интегрирования на интервале (0, 1).

13. Доказательство адекватности задачи Коши, 1

Для лучшего освещения всех аналитических и вычислительных преимуществ изложенного выше подхода и более глубокого понимания построенной задачи Коши целесообразно показать, что решение этой задачи удовлетворяет исходному интегральному уравнению.

Доказательство эквивалентности интегрального уравнения задаче Коши основано на единственности решения последней. Поэтому мы будем считать, что весовая функция $w(z)$ такова, что интегро-дифференциальные уравнения для X, Y и J обладают единственными решениями при любых $0 \leqslant x \leqslant T$ при достаточно малых T.

14. Общая схема доказательства

Поскольку при доказательстве мы пойдем довольно кружным путем, важно наметить общую схему доказательства, чтобы неискушенный читатель окончательно не запутался в обилии деталей.

Итак, начнем с рассмотрения следующих задач Коши:

$$X_x(x, z) = Y(x, z) \int_0^1 Y(x, z') w(z') dz', \tag{1}$$

$$Y_x(x, z) = -z^{-1} Y(x, t) + X(x, z) \int_0^1 Y(x, z') w(z') dz', \tag{2}$$

$$J_x(t, x, z) = -z^{-1} J(t, x, z) + \\ + X(x, z) \int_0^1 J(t, x, z') w(z') dz', \tag{3}$$

$$X(0, z) = Y(0, z) = 1, \tag{4}$$

$$J(t, t, z) = X(t, z). \tag{5}$$

Мы хотим показать, что в предположении единственности решения уравнений (1) — (3) функция $J(t, x, z)$, полученная в результате решения задачи Коши, удовлетворяет интегральному уравнению

$$J(t, x, z) = e^{-(x-t)/z} + \int_0^x k(|t-y|) J(y, x, z)\, dy, \tag{6}$$

где ядро k определено выше.

На различных этапах доказательства вводятся вспомогательные функции M, P, W, ψ, φ и Q. Их определения даются соотношениями

$$M(t, x, z) = e^{-(x-t)/z} + \int_0^x k(|t-y|) J(y, x, z)\, dy,$$
$$0 \leqslant t \leqslant x, \tag{7}$$

$$P(x, z) = 1 + \int_0^x k(y) J(x-y, x, z)\, dy, \quad 0 \leqslant x, \tag{8}$$

$$W_x(t, x, z) = Y(x, z) \int_0^1 J(t, x, z') w(z')\, dz', \quad x \geqslant t, \tag{9}$$

$$W(t, t, z) = Y(t, z), \tag{10}$$

$$\psi(t, x, z) = z^{-1} J(t, x, z) + Y(x, z) \int_0^1 W(t, x, z') w(z')\, dz' -$$
$$- X(x, z) \int_0^1 J(t, x, z') w(z')\, dz', \quad x \geqslant t, \tag{11}$$

$$\varphi(t, x, z) = -z^{-1} W(t, x, z) - Y(x, z) \int_0^1 J(t, x, z') w(z')\, dz' +$$
$$+ X(x, z) \int_0^1 W(t, x, z') w(z')\, dz', \quad x \geqslant t, \tag{12}$$

$$Q(x, z) = e^{-x/z} + \int_0^x k(y) J(y, x, z)\, dy, \quad x \geqslant 0. \tag{13}$$

Кроме того, как и ранее, определим функцию Φ:

$$\Phi(t,\ x) = \int_0^1 J(t,\ x,\ z')\, w(z')\, dz',\ x \geqslant t. \tag{14}$$

Для доказательства эквивалентности функций J и M устанавливаются следующие результаты:

(i) Функции M и P удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$M_x(t,\ x,\ z) = -z^{-1} M(t,\ x,\ z) + \\ + X(x,\ z) \int_0^1 M(t,\ x,\ z')\, w(z')\, dz, \tag{15}$$

$$P_x(x,\ z) = Y(x,\ z) \int_0^1 \{ e^{-x/z'} + \\ + \int_0^\infty k(y)\, J(y,\ x,\ z')\, dy \}\, w(z')\, dz'\ . \tag{16}$$

При $t = 0$ имеем

$$J(0,\ x,\ z) = Y(x,\ z) \tag{17}$$

и

$$W(0,\ x,\ z) = X(x,\ z). \tag{18}$$

(ii) Частные производные функций J и W по t равны

$$J_t(t,\ x,\ z) = \psi(t,\ x,\ z), \tag{19}$$

$$W_t(t,\ x,\ z) = \varphi(t,\ x,\ z). \tag{20}$$

Полная производная функции $J(x-t,\ x,\ z)$ по x определяется выражением

$$\frac{d}{dx} J(x-t,\ x,\ z,) = Y(x, z) \int_0^1 W(x-t, x, z')\, w(z')\, dz'. \tag{21}$$

(iii) Функции W и J связаны соотношением

$$W(x-t,\ x,\ z) = J(t,\ x,\ z), \tag{22}$$

поэтому

$$\frac{d}{dx} J(x-t,\ x,\ z) = Y(x, z) \int_0^1 J(t,\ x,\ z')\, w(z')\, dz'. \tag{23}$$

(iv) Для функций P, Q, X и Y справедливы равенства

$$Q(x, z) = Y(x, z), \tag{24}$$

$$P(x, z) = X(x, z). \tag{25}$$

Тогда из эквивалентности функций P и X следует требуемый результат

$$M(t, x, z) = J(t, x, z). \tag{26}$$

15. Дифференциальные уравнения для M и P

Продифференцировав обе части уравнения (14.7) по x, получим

$$M_x(t, x, z) = -z^{-1}e^{-(x-t)/z} + k(x-t)J(x, x, z) + \int_0^x k(|t-y|)J_x(y, x, z)\,dy. \tag{1}$$

В соответствии с дифференциальным уравнением (14.3) для J интеграл в (1) принимает вид

$$\int_0^x k(|t-y|)J_x(y, x, z)\,dy = \int_0^x k(|t-y|)\left\{-z^{-1}J(y, x, z) + X(x, z)\int_0^1 J(y, x, z')w(z')\,dz'\right\}dy, \tag{2}$$

откуда, учитывая уравнения (14.3) и (14.7), получаем уравнение (14.15) для функции M. Для получения начального условия для M при $x = t$ запишем

$$M(t, t, z) = 1 + \int_0^t k(|t-y|)J(y, t, z)\,dy \tag{3}$$

или

$$M(x, x, z) = 1 + \int_0^x k(x-y) J(y, x, z)\, dy. \qquad (4)$$

Подставив $y' = x - y$ в последнее уравнение, получим

$$M(x, x, z) = P(x, z) = 1 + \int_0^x k(y') J(x-y', x, z)\, dy'. \qquad (5)$$

Дифференцируя (5) по x, приходим к уравнению

$$P_x(x, z) = k(x) J(0, x, z) + \int_0^x k(y) \frac{d}{dx} J(x-y, x, z)\, dy. \qquad (6)$$

Вернемся теперь к уравнению (14.3) для функции J. Положим $t = 0$ и заметим, что функция $J(0, x, z)$ удовлетворяет той же задаче Коши, что и $Y(x, z)$, поскольку

$$J(0, 0, z) = X(0, z) = 1. \qquad (7)$$

Значит,

$$J(0, x, z) = Y(x, z),$$

что совпадает с уравнением (14.17). Аналогично можно показать, что уравнение (14.18) также имеет место.

16. Частные производные функций J и W

В силу (14.3) функция $J_t = J_t(t, x, z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(J_t)_x = -z^{-1} J_t + X(x, z) \int_0^1 J_t(t, x, z') w(z')\, dz'. \qquad (1)$$

Пусть

$$J_1(t, x, z) = J_t(t, x, z) \qquad (2)$$

и

$$J_2(t, x, z) = J_x(t, x, z). \qquad (3)$$

Поскольку

$$J(t, t, z) = X(t, z), \qquad (4)$$

то при $x = t$

$$J_1(t, t, z) = X_t(t, z) - J_2(t, t, z) =$$

$$= Y(t, z) \int_0^1 Y(t, z') w(z')\, dz' + z^{-1} X(t, z) -$$

$$- X(t, z) \int_0^1 X(t, z') w(z')\, dz'. \qquad (5)$$

Очевидно, что функция ψ, определенная равенством (14.11), удовлетворяет при $x = t$ тому же начальному условию

$$\psi(t, t, z) = z^{-1} X(t, z) + Y(t, z) \int_0^1 Y(t, z') w(z')\, dz' -$$

$$- X(t, z) \int_0^1 X(t, z') w(z')\, dz'. \qquad (6)$$

Кроме того, продифференцировав (14.11) по x, получаем

$$\psi_x(t, x, z) = \frac{1}{z} \Big[- z^{-1} J(t, x, z) +$$

$$+ X(x, z) \int_0^1 J(t, x, z') w(z')\, dz' \Big] + \Big\{ - z^{-1} Y(x, z) +$$

$$+ X(x, z) \int_0^1 Y(x, z') w(z')\, dz' \Big\} \int_0^1 W(t, x, z') w(z')\, dz' +$$

$$+ Y(x, z) \int_0^1 Y(x, z') \int_0^1 J(t, x, z'') w(z'')\, dz''\, w(z')\, dz' -$$

$$- Y(x, z) \int_0^1 Y(x, z') w(z')\, dz' \int_0^1 J(t, x, z'') w(z'')\, dz'' -$$

$$-X(x, z)\int_0^1\Big\{-z'^{-1}J(t, x, z')+$$

$$+X(x, z')\int_0^1 J(t, x, z'')w(z'')\,dz''\Big\}w(z')\,dz'. \tag{7}$$

Приводя подобные члены и сравнивая с (14.11), получаем, что уравнение (7) принимает вид

$$\psi_x(t, x, z) = -z^{-1}\psi(t, x, z)+$$

$$+X(x, z)\int_0^1 \psi(t, x, z')w(z')\,dz', \quad t \leqslant x. \tag{8}$$

Поскольку J_t и ψ являются решениями одной и той же задачи Коши, то

$$J_t(t, x, z) = \psi(t, x, z), \quad 0 \leqslant t \leqslant x,\ 0 \leqslant z \leqslant 1. \tag{9}$$

В силу (14.9) и (14.10) задача Коши для функции W_t,

$$W_t(t, x, z) = W_1(t, x, z), \tag{10}$$

имеет вид

$$(W_t)_x = Y(x, z)\int_0^1 J_t(t, x, z')w(z')\,dz', \ t \leqslant x, \tag{11}$$

$$W_1(t, t, z) = -z^{-1}Y(t, z) + X(t, z)\int_0^1 Y(t, z')w(z')\,dz' -$$

$$-Y(t, z)\int_0^1 X(t, z')w(z')\,dz'. \tag{12}$$

Используя уравнения (14.3) и (14.10), можно показать, что функция φ, определяемая уравнением (14.12), удовлетворяет тому же самому начальному условию при $x = t$:

$$\varphi(t, t, z) = -z^{-1}Y(t, z) - Y(t, z)\int_0^1 X(t, z')w(z')\,dz' +$$

$$+ X(t, z)\int_0^1 Y(t, z')w(z')\,dz'. \qquad (13)$$

Кроме того, функция φ_x при $x \geqslant t$ определяется формулой

$$\varphi_x(t, x, z) = z^{-1}Y(x, z)\int_0^1 J(t, x, z')w(z')\,dz' -$$

$$-\left[z^{-1}Y(x, z) + X(x, z)\int_0^1 Y(x, z')w(z')\,dz'\right] \times$$

$$\times \int_0^1 J(t, x, z')w(z')\,dz' - Y(x, z)\int_0^1 \Bigl[-z'^{-1}J(t, x, z') +$$

$$+ X(x, z')\int_0^1 J(t, x, z'')w(z'')\,dz''\Bigr] w(z')\,dz' +$$

$$+ Y(x, z)\int_0^1 Y(x, z')w(z')\,dz'\int_0^1 W(t, x, z'')w(z'')\,dz'' +$$

$$+ X(x, z)\int_0^1 w(z')\,dz'\,Y(x, z')\int_0^1 J(t, x, z'')w(z'')\,dz''. \qquad (14)$$

Приводя подобные члены и учитывая (14.11), запишем это выражение в виде

$$\varphi_x(t, x, z) = Y(x, t)\int_0^1 \psi(t, x, z')w(z')\,dz',$$

$$t \leqslant x, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1. \qquad (15)$$

В силу равенства (9) получается, что функции φ и W_t удовлетворяют одной и той же задаче Коши, поэтому

$$W_t(t, x, z) = \varphi(t, x, z), \; t \leqslant x, \; 0 \leqslant z \leqslant 1. \qquad (16)$$

Отсюда вытекают уравнения (14.19) и (14.20).

Учитывая уравнения (14.19), (14.3) и (3), легко показать, что

$$\frac{d}{dx} J(x-t,\ x,\ z) = \varphi(x-t,\ x,\ z) + J_2(x-t, x, z) =$$

$$= z^{-1} J(x-t,\ x,\ z) + Y(x,\ z) \int_0^1 W(x-t, x,\ z') w(z')\, dz' -$$

$$- X(x,\ z) \int_0^1 J(x-t, x, z') w(z')\, dz' - z^{-1} J(x-t, x, z) +$$

$$+ X(x,\ z) \int_0^1 J(x-t, x, z') w(z')\, dz' =$$

$$= Y(x, z) \int_0^1 W(x-t, x, z') w(z')\, dz'. \qquad (17)$$

Таким образом получаем уравнение (14.21).

17. Связь между *W* и *J*

Для вывода уравнения (14.22) достаточно построить задачу Коши для функции $W(x-t,\ x,\ z)$ и сравнить ее с аналогичной задачей для J, определяемой уравнением (14.3). При $x=t$ в силу (14.18) имеем

$$W(0,\ t,\ z) = X(t,\ z). \qquad (1)$$

Из (16.16) и (14.9) вытекает, что

$$\frac{d}{dx} W(x-t,\ x,\ z) = -z^{-1} W(x-t,\ x,\ z) -$$

$$- Y(x, z) \int_0^1 J(x-t, x, z') w(z')\, dz' +$$

$$+X(x, z) \int_0^1 W(x-t, x, z')w(z')\,dz' +$$

$$+Y(x, z) \int_0^1 J(x-t, x, z')w(z')\,dz',$$

$$t \leqslant x. \quad (2)$$

Упрощая, запишем это уравнение в виде

$$\frac{d}{dx} W(x-t, x, z) = -z^{-1}W(x-t, x, z) +$$

$$+X(x, z) \int_0^1 W(x-t, x, z')w(z')\,dz', \ t \leqslant x. \qquad (3)$$

Снова делая предположение о единственности решения, получаем

$$W(x-t, x, t) = J(t, x, z), 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant T, \ 0 \leqslant z \leqslant 1. \qquad (4)$$

Из этой формулы непосредственно вытекает соотношение

$$\frac{d}{dx} J(x-t, x, z) = Y(x, z) \int_0^1 J(t, x, z')\,w(z')\,dz', \qquad (5)$$

совпадающее с уравнением (14.21).

18. Соотношения между *P*, *Q*, *X* и *Y*

Вернемся теперь к уравнению (15.6), которое можно переписать в виде

$$P_x(x, z) = k(x)Y(x, z) +$$

$$+\int_0^x k(y)Y(x, z) \int_0^1 J(y, x, z')w(z')\,dz'dy =$$

$$= Y(x, z) \int_0^1 \left\{ e^{-x/z'} + \int_0^x k(y)J(y, x, z')\,dy \right\} w(z')\,dz',$$

$$(1)$$

где мы используем определение ядра k. В результате получаем уравнение (14.16).

Рассмотрим теперь выражение в фигурных скобках в уравнении (1), которое представляет собой функцию Q из (14.13). Продифференцировав обе части (14.13) по x, получим уравнение

$$Q_x(x, z) = -z^{-1}e^{-x/z} + k(x)J(x, x, z) + \int_0^x k(y)\Big[-z^{-1}J(y, x, z) + X(x, z)\int_0^1 J(y, x, z')w(z')\,dz'\Big]dy = -z^{-1}Q(x, z) + X(x, z)\Big[k(x) + \int_0^x k(y)\,dy\int_0^1 J(y, x, z')w(z')\,dz'\Big] = -z^{-1}Q(x, z) + X(x, z)\int_0^1 Q(x, z')w(z')\,dz'. \quad (2)$$

Это и есть уравнение (14.2). Далее, при $x = 0$ имеем начальное условие

$$Q(0, z) = 1, \qquad 0 \leqslant z \leqslant 1. \quad (3)$$

Сравнивая задачи Коши для функций Q и Y, заключаем, что

$$Q(x, z) = Y(x, z), \quad 0 \leqslant x \leqslant T, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1. \quad (4)$$

Уравнение (1) принимает вид

$$P_x(x, z) = Y(x, z)\int_0^1 Y(x, z')w(z')\,dz'. \quad (5)$$

При этом из определения функции P получаем начальное условие при $x = 0$

$$P(0,\ z)=1,\quad 0\leqslant z\leqslant 1. \tag{6}$$

Сравнивая этот результат с уравнением (14.1) для функции X, видим, что (14.25) имеет место,

$$P(x,\ z)=X(x,\ z),\ \ 0\leqslant x\leqslant T,\ \ 0\leqslant z\leqslant 1. \tag{7}$$

19. Интегральные уравнения для J и Φ

Вернемся теперь к рассмотрению функции M. Ранее мы показали, что она удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и J. Из уравнений (18.7), (14.8) и (15.5) следует, что

$$M(t,\ t,\ z)=1+\int_0^t k(y)\,J(x-y,\ x,\ z)\,dy=$$
$$=P(t,\ z)=X(t,\ z). \tag{1}$$

Поскольку J и M удовлетворяют одной и той же задаче Коши, из условия единственности последней вытекает равенство

$$J(t,\ x,\ z)=M(t,\ x,\ z), \tag{2}$$

или

$$J(t,\ x,\ z)=e^{-(x-t)/z}+\int_0^x k(\,|\,t-y\,|\,)\,J(y,\ x,\ z)\,dy,$$
$$0\leqslant t\leqslant x\leqslant T,\qquad 0\leqslant z\leqslant 1. \tag{3}$$

Это устанавливает тот фундаментальный результат, что функция J удовлетворяет семейству интегральных уравнений Фредгольма (14.6).

Теперь нетрудно показать, что функция Φ удовлетворяет уравнению (14.14). Умножая обе части (3) на $w(z)$, интегрируя по z от 0 до 1 и вспоминая определение функций Φ и k, получаем

$$\Phi(t,\ x)=k(x-t)+\int_0^1 k(\,|\,t-y\,|\,)\,\Phi(y,\ x)\,dy,$$
$$0\leqslant t\leqslant x\leqslant T. \tag{4}$$

20. Внешнее воздействие произвольного вида

В этом параграфе мы покажем, что наши методы легко обобщаются и на случай функций $g(t)$ произвольного вида.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$u(t) = g(t) + \int_0^c k(|t-y|)\,u(y)\,dy, \tag{1}$$

где g — непрерывная функция, а ядро k определено ранее. Погружая, как и ранее уравнение (1) в семейство аналогичных задач, получим семейство уравнений

$$u(t, x) = g(t) + \int_0^x k(|t-y|)\,u(y, x)\,dy, \quad x \geqslant t. \tag{2}$$

Построим теперь задачу Коши для функции u.

Продифференцировав (2) по x, получим

$$u_x(t, x) = k(x-t)\,u(x, x) + \\ + \int_0^x k(|t-y|)\,u_x(y, x)\,dy, \quad x \geqslant t. \tag{3}$$

Рассматривая (3) как линейное интегральное уравнение относительно функции u_x, запишем его решение в виде

$$u_x(t, x) = \Phi(t, x)\,u(x, x), \tag{4}$$

где Φ определяется уравнением (19.4). Ранее мы уже показали, как строится задача Коши для функции Φ, поэтому нам остается лишь рассмотреть функцию $u(x, x)$.

По определению $u(x, x)$ удовлетворяет уравнению

$$u(x, x) = g(x) + \int_0^x k(x-y)\,u(y, x)\,dy, \quad x \geqslant 0. \tag{5}$$

Используя (2.2), запишем (5) в виде

$$u(x, x) = g(x) + \int_0^x \int_0^1 e^{-(x-y)/z} w(z)\,dz\,u(y, x)\,dy =$$

$$= g(x) + \int_0^1 e(x, z) w(z)\, dz, \tag{6}$$

где изменен порядок интегрирования и введена новая функция

$$e(x, z) = \int_0^x e^{-(x-y)/z} u(y, x)\, dy. \tag{7}$$

Продифференцировав (7) по x, получим дифференциальное уравнение относительно функции e

$$e_x(x, z) = u(x, x) - z^{-1} e(x, z) + \int_0^x e^{-(x-y)/z} u_x(y, x)\, dy. \tag{8}$$

Последний член этого равенства можно записать в виде

$$\int_0^x e^{-(x-y)/z} u_x(y, x)\, dy = \int_0^x e^{-(x-y)/z} \Phi(y, x) u(x, x)\, dy. \tag{9}$$

Преобразуем к более удобному виду следующий интеграл:

$$I = \int_0^x e^{-(x-y)/z} \Phi(y, x)\, dy. \tag{10}$$

Для этого докажем лемму. Пусть

$$u_1(t) = g_1(t) + \int_0^x k(\,|\, t - y\,|\,) u_1(y)\, dy, \tag{11}$$

$$u_2(t) = g_2(t) + \int_0^x k(\,|\, t - y\,|\,) u_2(y)\, dy. \tag{12}$$

Перемножая эти уравнения крест-накрест и приводя подобные члены, легко показать, что

$$\int_0^x g_1(y) u_2(y)\, dy = \int_0^x g_2(y) u_1(y)\, dy. \tag{13}$$

Применяя эту лемму к (10), получим

$$I=\int_0^x e^{-(x-y)/z}\Phi(y,x)\,dy=\int_0^x J(y,\ x,\ z)\,k(x-y)\,dy. \quad (14)$$

Используя интегральное уравнение (19.3) для функции J приходим к соотношению

$$\int_0^x k(x-y)\,J(y,x,z)\,dy=J(x,x,z)-1=X(x,\ z)-1. \quad (15)$$

Благодаря ему уравнение для функции e можно переписать в виде

$$e_x(x,\ z)=-z^{-1}e(x,\ z)+X(x,\ z)\,u(x,\ x), \quad (16)$$

или

$$e_x(x,z)=-z^{-1}e(x,z)+X(x,z)\left[g(x)+\int_0^1 e(x,z')\,w(z')dz'\right]. \quad (17)$$

Начальное условие для e получается из уравнения (7):

$$e(0,\ z)=0. \quad (18)$$

21. Окончательный вид задачи Коши

В окончательном виде задача Коши для интегрального уравнения с функцией внешнего воздействия общего вида определяется следующей системой уравнений:

$$X_x(x,z)=Y(x,z)\int_0^1 Y(x,\ z')\,w(z')\,dz',\quad x>0, \quad (1)$$

$$Y_x(x,\ z)=-z^{-1}Y(x,\ z)+$$
$$+X(x,\ z)\int_0^1 Y(x,\ z')\,w(z')\,dz',\quad x>0, \quad (2)$$

$$J_x(t,\ x,\ z)=-z^{-1}J(t,\ x,\ z)+$$
$$+X(x,\ z)\int_0^1 J(t,x,z')\,w(z')\,dz',\quad x\geqslant t, \quad (3)$$

$$e_x(x,\ z) = -z^{-1}e(x,\ z) + X(x, z)\left[g(x) + \int_0^1 e(x,\ z')w(z')\,dz'\right], \quad x > 0, \quad (4)$$

$$u_x(t,\ x) = \left[g(x) + \int_0^1 e(x,\ z')w(z')\,dz'\right]\int_0^1 J(t, x,\ z')w(z')\,dz', \quad x \geqslant t. \quad (5)$$

Начальные условия имеют вид

$$X(0,\ z) = 1, \quad (6)$$

$$Y(0,\ z) = 1, \quad (7)$$

$$J(t,\ t,\ z) = X(t,\ z), \quad (8)$$

$$e(0,\ z) = 0, \quad (9)$$

$$u(t,\ t) = g(t) + \int_0^1 e(t, z')w(z')\,dz'. \quad (10)$$

Процедура численного решения в данном случае точно такая же, как и в § 11. В качестве примера рассмотрим интегральное уравнение

$$u(t) = (t-1) + \frac{1}{2}\int_0^2 E_1(\ |\ t-t'\ |\ )u(t')\,dt', \quad (11)$$

где $E_1(r)$ — экспоненциальная интегральная функция. Из литературы известно, что $u(2) = 1{,}520$. С помощью программы для ЭЦВМ, приведенной в приложении, использующей квадратурную формулу Гаусса с $N = 7$ и шагом интегрирования $\Delta = 0{,}005$, было получено решение $u(2) = 1{,}519455$.

22. Доказательство адекватности задачи Коши, II

Ранее мы показали, что для функции внешнего воздействия экспоненциального вида решения задач Коши для X, Y и J таковы, что J удовлетворяет интегральному уравнению

$$J(t,\ x,\ z) = e^{-(x-t)/z} + \int\limits_0^x k(\,|\,t-y\,|\,)\,J(y,\ x,\ z)\,dy. \quad (1)$$

Как следствие мы получили такой результат:

$$\Phi(t,\ x) = \int\limits_0^1 J(t,\ x,\ z')\,w(z')\,dz'. \quad (2)$$

Покажем теперь, что эти результаты вместе с задачами Коши для e и u и устанавливают эквивалентность сформулированной нами задачи Коши и исходного интегрального уравнения с функцией внешнего воздействия произвольного вида.

Определим функции A, L и E следующим образом:

$$A(t,\ x) = g(t) + \int\limits_0^x k(\,|\,t-y\,|\,)\,u(y,\ x)\,dy, \quad x \geqslant t, \quad (3)$$

$$L(t,\ x) = \int\limits_0^x k(\,|\,t-y\,|\,)\,u(y,\ t)\,dy, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$E(x,\ z) = \int\limits_0^x e^{-(x-y)/z}\,u(y,\ x)\,dy, \quad x \geqslant 0,\ 0 \leqslant z \leqslant 1. \quad (5)$$

Мы хотим использовать предположение о единственности решения задачи Коши для доказательства того, что $A \equiv u$. Прежде всего продифференцируем A по x. Тогда

$$A_x(t,\ x) = k(x-t)\,u(x,\ x) + \int\limits_0^x k(\,|\,t-y\,|\,)\,u_x(y,\ x)\,dy. \quad (6)$$

Используя уравнение (20.3) для $u_x(t,\ x)$, уравнение (19.4) для $\Phi(t,\ x)$ и определение функции $u(x,\ x)$, получим

$$A_x(t,\ x) = \left[k(x-t) + \int\limits_0^x k(\,|\,t-y\,|\,)\,\Phi(y,\ x)\,dy\right]\left[g(x) + \int\limits_0^1 e(x,\ z')\,w(z')\,dz'\right], \quad (7)$$

или

$$A_x(t,\ x) = \Phi(t,\ x)\left[g(x) + \int_0^1 e(x,\ z')\,w(z')\,dz'\right]. \qquad (8)$$

Начальное условие на A при $x = t$ определяется уравнением (3):

$$A(t,\ t) = g(t) + \int_0^t k(\ |\ t - y\ |\ )\,u(y,\ t)\,dy. \qquad (9)$$

Теперь мы должны показать, что

$$A(t,\ t) = g(t) + \int_0^1 e(t,\ z')\,w(z')\,dz', \quad t \geqslant 0. \qquad (10)$$

23. Начальное условие для функции A

Пусть $L(t)$ определяется следующим образом:

$$L(t) = \int_0^t k(\ |\ t - y\ |\ )\,u(y,\ t)\,dy. \qquad (1)$$

Используя определение k и меняя порядок интегрирования, получим

$$L(t) = \int_0^1 \left[\int_0^t e^{-(t-y)/z'}\,u(y,\ t)\,dy\right] w(z')\,dz'. \qquad (2)$$

Рассмотрим теперь член в квадратных скобках. Определим $E(x,\ z)$ формулой

$$E(x,\ z) = \int_0^x e^{-(x-y)/z}\,u(y,\ x)\,dy. \qquad (3)$$

Продифференцировав E по x, получим, что

$$E_x(x,\ z) = u(x,\ x) + \\ + \int_0^x \{\,e^{-(x-y)/z}\,[u_x(y,\ x) - z^{-1}u(y,\ x)]\,\}\,dy. \qquad (4)$$

Согласно (3) и (20.3),

$$E_x(x, z) = u(x, x)\left[1 + \int_0^x e^{-(x-y)/z}\Phi(y, x)\,dy\right] - z^{-1}E(x, z). \tag{5}$$

Для преобразования члена, стоящего в квадратных скобках, воспользуемся еще раз леммой из § 20 (уравнения (20.11)—(20.13)) и интегральными уравнениями для J и Φ. В результате приходим к формуле

$$E_x(x, z) = u(x, x)\left[1 + \int_0^x k(x-y)J(y, x, z)\,dy\right] - z^{-1}E(x, z). \tag{6}$$

Подстановка $t = x$ в интегральное уравнение (19.3) для функции $J(t, x, z)$ дает

$$E_x(x, z) = -z^{-1}E(x, z) + X(x, z)\left[g(x) + \int_0^1 e(x, z')w(z')\,dz'\right]. \tag{7}$$

Начальное условие при $x = 0$ имеет вид

$$E(0, z) = 0. \tag{8}$$

Отсюда следует, что

$$E(x, z) = e(x, z). \tag{9}$$

Подставляя это равенство в (2), получаем

$$L(t) = \int_0^1 e(t, z')w(z')\,dz'. \tag{10}$$

Учитывая (22.9) и (1), приходим к соотношению

$$A(t, t) = g(t) + \int_0^1 e(t, z')w(z')\,dz'. \tag{11}$$

Полученное таким образом начальное условие для A вместе с предположением единственности и уравнением (22.8) приводит к равенству

$$A(t, x) = u(t, x) \tag{12}$$

или

$$u(t, x) = g(t) + \int_0^x k(|t-y|)\, u(y, x)\, dy, \tag{13}$$

что и требовалось показать.

24. Обсуждение

Итак, мы показали полную эквивалентность интегрального уравнения Фредгольма (2.1) с ядром вида (2.2) и задачи Коши (21.1)—(21.10).

В оставшихся параграфах этой главы мы постараемся показать, каким образом описанная выше задача Коши может применяться для анализа различных вопросов, возникающих при стандартном подходе к таким интегральным уравнениям. А именно, мы рассмотрим случай бесконечного интервала интегрирования — случай, который обычно связывают с процедурой Винера — Хопфа. Будет показано, каким образом погружение приводит к методу, отличному от схемы Винера — Хопфа. Далее мы обратимся к одному из фундаментальных вопросов классической теории собственных функций. Мы покажем, что эти основные функции можно получить, решая задачи Коши, аналогичные описанным выше. Эти результаты чрезвычайно важны, поскольку они служат мостом между теорией задач Коши и обширной теорией разложения по собственным функциям и теоретико-функциональными результатами об интегральных операторах.

25. Однородная задача

До сих пор мы стремились главным образом показать, что инвариантное погружение является полезным аппаратом для решения неоднородных интегральных уравне-

ний. Наш подход, когда внимание концентрируется на неоднородных задачах, резко отличается от обычного подхода классической теории интегральных уравнений, где центральную роль играют собственные значения и собственные функции. Теперь мы проанализируем, как можно использовать теорию инвариантного погружения для их получения.

Для того чтобы наиболее ясно ввести основные понятия, рассмотрим сначала уравнение

$$J(t, x) = e^{-(x-t)} + \lambda \int_0^x e^{-|t-y|} J(y, x)\, dy. \qquad (1)$$

Для этого случая весовая функция ядра имеет вид $w(z) = \lambda\delta(z - 1)$, где δ — дельта-функция. Поскольку функция внешнего воздействия экспоненциальная, для решения уравнения (1) достаточно рассмотреть задачи Коши лишь для функций X, Y и J. Предположим для простоты изложения, что $\lambda = 1$. Вспоминая результаты § 10, запишем эти задачи в виде

$$X'(x) = Y^2(x),\ X(0) = 1, \qquad (2)$$

$$Y'(x) = -Y(x) + X(x)\ Y(x),\ Y(0) = 1, \qquad (3)$$

$$J'(t,\ x) = -J(t, x) + X(x)\ J(t, x), \quad J(t, t) = X(t), \qquad (4)$$

где знак «$'$» обозначает $\dfrac{d}{dx}$.

Простой вид уравнений (2) — (4) позволяет получить их решения в явном виде

$$X(x) = 1 + \operatorname{tg} x, \qquad (5)$$

$$Y(x) = \sec x, \qquad (6)$$

$$J(t, x) = (\sin t + \cos t) \sec x. \qquad (7)$$

Легко видеть, что построенная нами задача Коши не имеет решения при $x = (2k + 1)\pi/2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. В этой ситуации обычно прибегают к одной из основных теорем анализа — альтернативе Фредгольма, которая, грубо говоря, утверждает, что решение неоднородного

уравнения (1) не единственно тогда и только тогда, когда однородная задача

$$\varphi(t) = \int_0^x e^{-|t-x|}\varphi(y)\,dy \tag{8}$$

имеет нетривиальное решение. Поэтому мы можем предположить, что 1 является собственным значением интегральных операторов

$$T_x(\cdot) = \int_0^x e^{-|t-y|}(\cdot)\,dy \tag{9}$$

при $x = (2k+1)\pi/2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Кроме того, мы утверждаем, что при x, достаточно близком к $(2k+1)\pi/2$, решение неоднородной задачи, $J(t, x)$, близко к собственной функции, удовлетворяющей уравнению (8). Чуть позже мы поясним это замечание.

Заметим прежде всего, что если наши утверждения справедливы, то уравнения инвариантного погружения содержат всю информацию, необходимую для *одновременного* решения как неоднородной, так и однородной задачи (разумеется, при условии, что мы можем продолжать интегрирование через особые точки). При фиксированном λ процедура состоит в интегрировании уравнений для неоднородной задачи до тех пор, пока решение не станет «большим». Тогда решение неоднородной задачи будет приближенно равно ненормированной собственной функции, соответствующей собственному значению λ. Затем мы воспользуемся одним из методов (которые мы обсудим позже) для продолжения интегрирования через особую точку и повторим процедуру.

Проверим теперь, выполняются ли наши утверждения для задачи (1). Рассмотрим первую особую точку $x = \pi/2$. Разлагая $\sec x$ и $\operatorname{tg} x$ в ряд Лорана в окрестности $x = \pi/2$, получим

$$\sec x = \frac{1}{(x-\pi/2)} + \frac{(x-\pi/2)}{6} + \frac{7(x-\pi/2)^3}{60} + \cdots, \tag{10}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{(x-\pi/2)} - \frac{(x-\pi/2)}{3} - \frac{(x-\pi/2)^3}{45} - \cdots. \tag{11}$$

Функции X, Y и J поэтому можно записать в виде

$$X(x) = \frac{1}{(x-\pi/2)} + 1 - \frac{(x-\pi/2)}{3} - \frac{(x-\pi/2)^3}{45} - \cdots, \tag{12}$$

$$Y(x) = \frac{1}{(x-\pi/2)} + \frac{(x-\pi/2)}{6} + \frac{7(x-\pi/2)^3}{60} + \cdots, \tag{13}$$

$$J(t, x) = (\sin t + \cos t)\left[\frac{1}{(x-\pi/2)} + \frac{(x-\pi/2)}{6} + \right.$$
$$\left. + \frac{7(x-\pi/2)^3}{60} + \cdots\right]. \tag{14}$$

Аналогично строятся разложения и для других особых точек. Из формул (12) — (14) вытекает, что функции X, Y и J имеют простые полюсы в точке $x = \pi/2$. Умножив обе части (14) на $(x - \pi/2)$, видим, что

$$\lim_{x \to \pi/2} (x - \pi/2) J(t, x) = \sin t + \cos t. \tag{15}$$

Легко проверить, что функция $\varphi(t) = \sin t + \cos t$ является нетривиальным решением уравнения (8). Таким образом, для данного примера наши утверждения справедливы. Интересно отметить, что если $(x - \pi/2) = \varepsilon > 0$, то мы имеем оценку

$$J(t, x) - \frac{\varphi(t)}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{6} + \frac{7\varepsilon^2}{60} + O(\varepsilon^3). \tag{16}$$

Если, например, $\varepsilon = 10^{-3}$, то из (16) следует, что

$$J(t, x) - 10^3\varphi(t) \cong 10^{-4}. \tag{17}$$

Предыдущий пример демонстрирует типичное поведение задачи Коши для тех типов интегральных уравнений, которые мы рассматриваем в этой главе. Вообще говоря, решение неоднородного уравнения

$$u(t) = g(t) + \lambda \int_0^x k(\,|\,t - y\,|\,)\,u(y)\,dy \tag{18}$$

можно при достаточно малых $|x - x_i|$ разложить в ряд

$$u(t, x) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n(t)(x - x_i)^n, \quad 0 \leqslant x_i. \tag{19}$$

(Отметим, что если любой из коэффициентов $a_n(t)$, $-k \leqslant n \leqslant -1$, отличен от нуля, то x_i является особой точкой для соответствующего λ.) Если порядок полюса функции $u(t, x)$ в точке $x = x_i$ известен, то мы можем утверждать, что

$$u(t, x) \cong \varphi(t), \quad |x - x_i| \ll 1, \tag{20}$$

где $\varphi(t)$ — собственная функция, соответствующая данному λ для интервала длины x_i.

26. Продолжение за особые точки

В предыдущем параграфе мы описали процедуру получения собственных значений и собственных функций из уравнений инвариантного погружения в предположении, что мы можем продолжать интегрирование задачи Коши на интервалах за особыми точками. Рассмотрим более подробно, как это можно сделать.

Возьмем простой пример

$$J(t, x) = e^{-(x-t)} + \int_0^x e^{-|t-y|} J(y, x)\, dy. \tag{1}$$

Ранее мы уже видели, что функции X, Y и J имеют вид

$$X(x) = 1 + \operatorname{tg} x, \tag{2}$$

$$Y(x) = \sec x, \tag{3}$$

$$J(t, x) = (\sin t + \cos t) \sec x. \tag{4}$$

Один из простейших приемов, который можно использовать для продолжения интегрирования, состоит в замене переменных, когда функции X, Y и J становятся

«большими». Так, например, новые переменные

$$R(x) = 1/X(x), \tag{5}$$

$$S(x) = 1/Y(x), \tag{6}$$

$$T(t, x) = 1/J(t, x) \tag{7}$$

проходят через нуль, когда X, Y и J становятся неограниченными при $x = (2k+1)\pi/2$, $k = 0, 1, \ldots$. Таким образом, когда x приближается к какой-либо особой точке, мы переходим к решению новых уравнений

$$R'(x) = -R^2(x)/S^2(x), \tag{8}$$

$$S'(x) = S(x) - S(x)/R(x), \tag{9}$$

$$T'(t, x) = -T(t, x) - T(t, x)/R(x) \tag{10}$$

с начальными условиями при $x = x^*$

$$R(x^*) = 1/X(x^*), \tag{11}$$

$$S(x^*) = 1/Y(x^*), \tag{12}$$

$$T(t, x^*) = 1/J(t, x^*), \tag{13}$$

где x^* — некоторая точка из интервала $(2k+1)\pi/2 < x^* < (2k+3)\pi/2$, $k = 0, 1, \ldots$. После того, как при интегрировании уравнений для R, S и T особая точка оказывается пройденной, мы можем снова вернуться к старым переменным. Используя приведенные выше явные решения, запишем для данного примера

$$R(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}, \tag{14}$$

$$S(x) = \cos x, \tag{15}$$

$$T(t, x) = \frac{\cos x}{\cos t + \sin t}. \tag{16}$$

Другой метод продолжения состоит в использовании разложения функций X, Y и J в ряд Лорана в окрестности данной особой точки. Для того же примера мы уже видели, что при x, близком к $\pi/2$, имеют место равенства

$$X(x) = \frac{1}{(x-\pi/2)} + 1 - \frac{(x-\pi/2)}{3} - \frac{(x-\pi/2)^3}{45} \cdots, \quad (17)$$

$$Y(x) = \frac{1}{(x-\pi/2)} + \frac{(x-\pi/2)}{6} + \frac{7(x-\pi/2)^3}{60} + \cdots, \quad (18)$$

$$J(t, x) = (\sin t + \cos t)\left[\frac{1}{(x-\pi/2)} + \frac{(x-\pi/2)}{6} + \right.$$
$$\left. + \frac{7(x-\pi/2)^3}{60}\right]. \quad (19)$$

Таким образом, для получения начальных условий в точке $\pi/2 < x^* < 3\pi/2$ нам необходимо лишь вычислить $X(x^*)$, $Y(x^*)$ и $J(t, x^*)$ по формулам (17) — (19). Вообще говоря, мы могли бы вычислить коэффициенты разложения, воспользовавшись интерполяцией по значениям функций X, Y и J вблизи данной особой точки. Функции X, Y и J, например, можно вычислить в точках x_1, x_2, x_3, близких к особой точке x. Тогда, предполагая, что рассматриваемая точка является простым полюсом, можно получить коэффициенты a_{-1}, a_0, a_1 ряда Лорана с помощью метода наименьших квадратов.

Третий способ продолжения состоит в использовании исходного интегрального уравнения и метода последовательных приближений. Например, применение метода последовательных приближений в уравнении (1) приводит к итеративной схеме

$$J_n(t, x) = e^{-(x-t)} + \int_0^x e^{-|t-y|} J_{n-1}(y, x)\,dy,$$
$$x > \pi/2, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad (20)$$

$$J_0(t, x) = e^{-(x-t)}. \quad (21)$$

Хорошо известно, что последовательность $\{J_n(t, x)\}$ расходится при x, больших первого сингулярного значения, если не принимать специальных мер. Было замечено, что применение к последовательности $\{J_n\}$ преобразования Шэнкса в некоторых случаях приводит к сходимости и для таких значений x. Литература, где рассматриваются эти методы, приведена в конце главы. После того, как вычислена функция $J(t, x)$, можно получить

функции X, Y из J, положив $t=0$ и x соответственно.

Еще один стандартный способ решения интегральных уравнений, который можно использовать для обхода особых точек, заключается в переходе к алгебраическим уравнениям. Рассмотрим опять тот же пример и воспользуемся какой-либо квадратурной формулой для замены интеграла в уравнении (1) конечной суммой

$$\int_0^x e^{-|t-y|} J(y,\ x)\,dy = \sum_{i=1}^{N} \exp(-\ |\ t-y_i\ |\ ) J(y_i,\ x) w_i, \quad x > \pi/2. \quad (22)$$

Числа y_i и w_i определяются применяемой квадратурной схемой. Исходное уравнение для J теперь принимает вид

$$J(t,\ x) = e^{-(x-t)} + \sum_{i=1}^{N} \exp(-\ |\ t-y_i\ |\ ) J(y_i, x) w_i. \quad (23)$$

Пусть t последовательно принимает значения из $\{y_i\}$. Тогда (23) приводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно $J(y_i,\ x)$.

Решение этой системы дает тогда начальные значения для J (и, следовательно, для X и Y) для длин интервалов больших, чем $\pi/2$.

Изложенные идеи нетрудно перенести с простого примера уравнения (1) на случай уравнений более сложного вида, с которыми мы имели дело ранее. Единственным дополнительным шагом является введение еще нескольких функций для определения функций e и u, являющихся частью полной задачи Коши.

27. Бесконечный интервал, I

Во многих задачах, возникающих в физике и технике, требуется решать интегральное уравнение

$$u(t) = g(t) + \int_0^\infty k(\ |\ t-y\ |\ ) u(y)\,dy. \quad (1)$$

Такой вид имеет, например, уравнение Милна равновес-

ного излучения в фотосфере звезды. Классический подход к решению этой задачи состоит в применении преобразования Фурье к обеим частям (1) и использовании метода Винера — Хопфа для вычисления неизвестной функции u. Как будет показано ниже, описанный ранее подход можно использовать и в этом случае для построения иного метода решения таких задач. Поставив основной целью создание эффективного вычислительного алгоритма, мы покажем, что комбинация метода инвариантного погружения и легких аналитических «трюков» создает благоприятные возможности для решения уравнения (1).

Поскольку мы уже построили метод решения интегрального уравнения

$$u(t, x) = g(t) + \int_0^x k(|t-y|)\, u(y, x)\, dy \tag{2}$$

при любом конечном x, для которого решение существует, первое, что мы сделаем, — это будем рассматривать уравнение (1) как предельный вид уравнения (2) при $x \to \infty$. Поэтому разумно предположить, что при $x \to \infty$ последовательность $u(t, x)$ будет сходиться к решению уравнения (1). Таким образом, мы можем проинтегрировать нашу задачу Коши, начиная с $x = 0$ и продолжая интегрирование до тех пор, пока решение не приблизится к некоторому предельному значению. При соответствующих ограничениях на вид функций g и k это значение и будет решением уравнения (1).

Хотя эта процедура принципиально чрезвычайно проста и потому кажется привлекательной, она страдает очевидным недостатком, а именно, может оказаться, что для получения асимптотического решения потребуется интегрировать уравнение на очень большом интервале. Поэтому может потребоваться большая вычислительная работа. В этом случае может оказаться полезной некоторая процедура экстраполяции. Предположим, например, что при фиксированном t решение уравнения (2) на конечном интервале x имеет вид

$$u(t, x) = A + Be^{-\beta x}, \tag{3}$$

где A и есть асимптотическое решение:

$$A = \lim_{x \to \infty} u(t, x). \tag{4}$$

Поскольку в формулу (3) входят три неизвестных параметра, то, вычислив $u(t, x)$ для трех значений x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, можно получить величину A по формуле

$$A = \frac{u(t, x_{n+1})\, u(t, x_{n-1}) - u^2(t, x_n)}{u(t, x_{n+1}) + u(t, x_{n-1}) - 2u(t, x_n)}. \tag{5}$$

Таким образом, вычислив решение для x_n, x_{n+1}, x_{n-1} мы можем, используя (5), предсказать асимптотическое значение $u(t, x)$. Формула (5) является частным случаем некоторого класса нелинейных экстраполяционных формул. Ссылки на статьи Шэнкса и других авторов, где эти методы обсуждаются во всех подробностях, приведены в конце главы.

28. Бесконечный интервал, II

Попробуем теперь применить вспомогательные функции, введенные выше при обосновании задачи Коши для функций X, Y и J, для построения иного метода, который в некоторых случаях может оказаться полезным при решении интегральных уравнений на полупрямой. Пусть мы имеем уравнение

$$u(t) = g(t) + \int_0^\infty k(|t - y|)\, u(y)\, dy. \tag{1}$$

Предположим на этот раз, что функцию $g(t)$ можно записать в виде

$$g(t) = \int_0^1 e^{-t/z} \alpha(z)\, dz \tag{2}$$

с соответствующей весовой функцией α. В этом случае мы можем представить решение уравнения (1) в виде

$$u(t) = \int_0^1 J(t, z)\, \alpha(z)\, dz, \tag{3}$$

где $J(t, z)$ — решение интегрального уравнения

$$J(t, z) = e^{-t/z} + \int_0^\infty k(|t-y|) J(y, z)\, dy, \quad t \geqslant 0,\ 0 \leqslant z \leqslant 1. \tag{4}$$

Вспомним теперь функцию $W(t, x, z)$, введенную в § 14. Заметим, что W удовлетворяет интегральному уравнению

$$W(t, x, z) = e^{-t/z} + \int_0^x k(|t-y|) W(y, x, z)\, dy,$$

$$x \geqslant t, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1. \tag{5}$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty} W(t, x, z) = J(t, z). \tag{6}$$

Ранее мы показали, что W и J являются решениями следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} W_t(t, x, z) = &- z^{-1} W(t, x, z) - \\ &- Y(x, z) \int_0^1 J(t, x, z') w(z')\, dz' + \\ &+ X(x, z) \int_0^1 W(t, x, z') w(z')\, dz', \end{aligned}$$

$$x \geqslant t, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} J_t(t, x, z) = &\, z^{-1} J(t, x, z) + \\ &+ Y(x, z) \int_0^1 W(t, x, z') w(z')\, dz' + \\ &+ X(x, z) \int_0^1 J(t, x, z') w(z')\, dz', \end{aligned} \tag{8}$$

$$W(0, x, z) = X(x, z), \tag{9}$$

$$J(0, x, z) = Y(x, z). \tag{10}$$

Предполагая, что мы уже вычислили функции X и Y,

мы получаем, таким образом, другую задачу Коши для J и W, где t теперь является независимой переменной. Ниже станет ясно, что наличие этой дополнительной системы уравнений представляет большое удобство.

Предполагая, что $Y(x, z) \to 0$ при $x \to \infty$ (что действительно имеет место во многих задачах), получаем

$$J_t(t, z) = \lim_{x\to\infty} W_t(t, x, z), \tag{11}$$

$$J_t(t, z) = -z^{-1}J(t, z) + \varphi(z)\int_0^1 J(t, z')\,w(z')\,dz', \tag{12}$$

где функция $\varphi(z)$ определяется так:

$$\varphi(z) = \lim_{x\to\infty} X(x, z). \tag{13}$$

Для вычисления функции $\varphi(z)$ можно либо, как это делалось раньше, проинтегрировать задачу Коши для X и Y при достаточно большом x, гарантирующем хорошее приближение к асимптотическому решению, либо использовать тот факт, что φ удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению

$$\varphi(z) = 1 + \int_0^1 \frac{zv}{z+v}\,\varphi(z)\,\varphi(v)\,w(v)\,dv, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1. \tag{14}$$

Для доказательства (14) рассмотрим функцию $R(v, z, x)$, определенную формулой

$$R(v, z, x) = \int_0^x e^{-(x-y)/z} J(y, x, v)\,dy. \tag{15}$$

Продифференцировав (15) по x, получим

$$R_x(v, z, x) = J(x, x, v) + \int_0^x e^{-(x-y)/z} J_x(y, x, v)\,dy - \frac{1}{z}\int_0^x e^{-(x-y)/z} J(y, x, v)\,dy =$$

$$= J(x,\ x,\ v) - \frac{1}{z} R(v,\ z,\ x) +$$

$$+ \int_0^x e^{-(x-y)/z} \Big\{ -v^{-1} J(y,\ x,\ v) +$$

$$+ X(x, v) \int_0^1 J(y, x, v') w(v')\, dv' \Big\} dy =$$

$$= J(x, x, v) - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{v}\right) R(v, z, x) +$$

$$+ X(x,\ v) \int_0^x \int_0^1 e^{-(x-y)/z} J(y, x, v') w(v')\, dv' dy. \tag{16}$$

При последнем переходе использовалась построенная ранее задача Коши для $J(t,\ x,\ v)$. Используя определение функции $J(x,\ x,\ v)$ и меняя порядок интегрирования в последнем члене, запишем (16) в виде

$$R_x(v,\ z,\ x) = -\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{v}\right) R(v,\ z,\ x) +$$

$$+ X(x,\ v) \left[1 + \int_0^1 R(v', z, x) w(v')\, dv'\right]. \tag{17}$$

Вспоминая, что

$$X(x, z) = 1 + \int_0^x k(x-y) J(y, x, z)\, dy =$$

$$= 1 + \int_0^x \int_0^1 e^{-(x-y)/z'} w(z')\, dz' J(y,\ x,\ z)\, dy, \tag{18}$$

видим, что

$$X(x,\ z) = 1 + \int_0^1 R(v', z, x) w(v')\, dv'. \tag{19}$$

Поэтому уравнение (17) принимает следующий окончательный вид:

$$R_x(v, z, x) = -\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{v}\right) R(v, z, x) + X(x, v) X(x, z). \tag{20}$$

Начальное условие для (20) непосредственно следует из уравнения (15):

$$R(v, z, 0) = 0. \tag{21}$$

Заметим также, что R симметрична по первым двум аргументам, т. е.

$$R(v, z, x) = R(z, v, x). \tag{22}$$

Проинтегрировав (20), получим

$$R(x, z, x) = e^{-(1/z+1/v)\,x} \int_0^x e^{(1/z+1/v)\,y} X(y, z) X(y, v)\, dy. \tag{23}$$

Подставляя (23) в (19), получаем уравнение

$$X(x, z) = 1 + \int_0^1 \left\{ e^{-(1/z+1/v)\,x} \int_0^x e^{(1/z+1/v)\,y} X(y, z) X(y, v) \right\} w(v)\, dv. \tag{24}$$

Устремив x к ∞ и предположив, что переход к пределу можно выполнить под знаком интеграла, получим

$$\varphi(z) = 1 + \int_0^1 \left\{ \lim_{x\to\infty} e^{-(1/z+1/v)\,x} \int_0^x e^{(1/z+1/v)\,y} X(y, z) X(y, v) \right\} dy\, w(v)\, dv. \tag{25}$$

Применим теперь правило Лопиталя. Тогда

$$\varphi(z) = 1 + \int_0^1 \lim_{x\to\infty} \frac{X(x, z)\, X(x, v)}{1/z + 1/v}\, w(v)\, dv, \tag{26}$$

или

$$\varphi(z) = 1 + \int_0^1 zv\, \frac{\varphi(z)\, \varphi(v)}{z + v}\, w(v)\, dv, \tag{27}$$

что и требовалось доказать.

Для определения φ из уравнения (27) можно применить метод последовательных приближений. Начальное условие для уравнения (8) имеет вид

$$J(0, z) = \lim_{x\to\infty} X(x, z) = \varphi(z). \quad (28)$$

29. Бесконечный интервал. Пример

Для иллюстрации описанного метода рассмотрим интегральное уравнение, описывающее распространение излучения,

$$J(t, z) = \frac{\lambda}{4} e^{-t/z} + \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty E_1(|t-y|) J(y, z)\, dy, \quad (1)$$

где

$$E_1(|t-y|) = \int_0^1 e^{-|t-y|/z} dz/z. \quad (2)$$

Задача Коши для этой функции J имеет вид

$$J_t(t, z) = -z^{-1} J(t, z) + \frac{\lambda}{4} \varphi(z) \Phi(t), \quad t > 0, \quad (3)$$

$$J(0, z) = \frac{\lambda}{4} \varphi(z), \quad (4)$$

где

$$\Phi(t) = 2 \int_0^1 J(t, z')\, dz'/z'. \quad (5)$$

Заметим, что функции J, φ и Φ, описывающие распространение излучения, несколько отличаются от аналогичных функций, использованных ранее.

Заменяя, как и ранее, интегралы квадратурными формулами Гаусса, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функции J. Функция $\varphi(z)$ определяется из нелинейного интегрального уравнения

$$\varphi(z) = 1 + \lambda/2\, z\varphi(z) \int_0^1 \frac{z'\varphi(z')}{z+z'}\, dz', \quad 0 \leqslant z \leqslant 1. \quad (6)$$

Для решения этого уравнения воспользуемся модифицированным методом Ньютона. Заменив интеграл конечной суммой в соответствии с квадратурной формулой Гаусса N-го порядка, получим линеаризованное уравнение. Последовательные приближения для N неизвестных $\varphi(z_1)$, $\varphi(z_2), \ldots, \varphi(z_N)$ получаются в результате решения системы линейных алгебраических уравнений.

В качестве численного примера приведем результаты вычислений функций φ, J и Φ для $\lambda = 1{,}0$. Для вычисления интеграла использовалась квадратурная формула Гаусса 7-го порядка. Функция φ вычислялась в семи точках с погрешностью 10^{-5} за 14 итераций с начальным приближением $\varphi(z) \equiv 1$. Значения z_i и $\varphi(z_i)$ приведены в таблице 1. В таблице 2 приведены значения функций Φ и J, описывающих физику данного процесса, полученные с использованием приведенных значений φ.

Таблица 1

Функция φ (Z)

z_i	$\varphi(z_i)$
0,0254	1,0759
0,1292	1,3084
0,2971	1,6368
0,5000	2,0124
0,7029	2,3786
0,8708	2,6779
0,9746	2,8618

Таблица 2

Значения J_i и Φ

t	0,2	0,6	1,0	3,0
Φ	2,0223	1,8149	1,7662	1,7313
$J(t, z_1)$	0,0142	0,0125	0,0121	0,0119
$J(t, z_4)$	0,5296	0,4979	0,4707	0,4368
$J(t, z_7)$	0,8850	1,0290	1,1014	1,1965

Сравнение приведенных результатов с опубликованными ранее показывает, что полученные значения вычислены с удовлетворительной точностью. Заметим, что, как видно из таблицы 2, с ростом t функции стремятся к асимптотическому решению. Теоретически асимптотическое решение Ф равно $\sqrt{3} \cong 1{,}732$.

Замечания и литература

§ 1. Классическое изложение теории интегральных уравнений содержится в книгах

Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. I, М., ИЛ, 1951.

Трикоми Ф., Интегральные уравнения, М., ИЛ, 1960.

Михлин С. Г., Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники, М. — Л., Гостехиздат, 1949.

§ 4. Эти результаты впервые получены в работе

Кагивада, Калаба, Шумицки (Kagiwada H., Kalaba R., Schumitzky A.), A representation for the solution of Fredholm integral equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **23** (1969), 37—40.

§ 5. Фундаментальное уравнение для резольвентного ядра было независимо получено Беллманом и М. Г. Крейном в работах

Беллман Р. (Bellman R.), Functional equations in the theory of dynamic programming—VII: A partial differential equation for the Fredholm resolvent, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 (1957), 435—440.

Крейн М. Г., О новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода, *ДАН СССР*, **100** (1955), 413—416.

§ 6. Функция Ф представляет существенный интерес при изучении распространения излучения в атмосфере. Подробнее см.

Соболев В. В., Рассеяние света в атмосферах планет, изд-во «Наука», М., 1972.

§ 8. Те же самые уравнения для функций X и Y получены Чандрасекхаром. Об их применении в процессах распространения излучения см.

Чандрасекхар С. (Chandrasekhar S.), Radiative transfer, Dover, New York, 1960.

§ 10. При изложении материала этого параграфа мы следовали работе

Касти, Кагивада, Калаба (Casti J., Kagiwada H., Kalaba R.), The invariant imbedding numerical method for the solution of Fredholm integral equations with displacement kernels, Proc. ACM Nat. 1-st Conf., San Francisco, 1969.

§ 12. Подробнее см.

Кагивада, Калаба (Kagiwada H., Kalaba R.), An initial value method suitable for the computation of certain Fredholm resolvents, *J. Math. and Phys. Sci.*, **1—2** (1967), 109—122.

§§ 13—24. Это доказательство опубликовано в

Касти, Калаба (Casti J., Kalaba R.), Proof of the basic invariant imbedding method for Fredholm integral equations with displacement kernels, I, *Info. Sci.*, **2** (1970), 51—67.

§ 25. График зависимости первого собственного значения ядра $E_1(|t-y|)$ от положения первой особой точки приведен в статье

Беллман, Кагивада, Калаба (Bellman R., Kagiwada H., Kalaba R.), New derivation of the integro—differential equations for Chandrasekhar's X and Y functions, *J. Math. and Phys.*, 9 (1968), 906—908.

§ 26. Эти результаты заимствованы из работы

Касти, Калаба, Скотт (Casti J., Kalaba R,. Scott M.), A proposal for the calculation of characteristic values and functions for certain differential and integral operators via initial value procedures, *J. Math. Anal. Appl.*, Jan. 1973.

§§ 27—30. Ссылки на другие работы для случая полупрямой можно найти в

Кагивада, Калаба, Вереке (Kagiwada H., Kalaba R., Vereeke B.), Invariant imbedding and Fredholm integral equations with displacement kernels on an infinite interval, The RAND Corp., RM—5646—PR, May 1968.

Более подробно с методами нелинейной экстраполяции можно познакомиться по работам

Шэнкс (Shanks D.), Nonlinear transformations of divergent and slowly convergent sequences, *J. Math. and Phys.*, 34 (1955/56), 1—42.

Беллман, Калаба (Bellman R., Kalaba R.), A note on nonlinear summability techniques in invariant imbedding, *J. Math. Anal. Appl.*, 6 (1963), 465—472.

Глава 5
ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

1. Введение

За время, прошедшее после запуска первого искусственного спутника, были достигнуты большие успехи в развитии численных методов решения широкого класса задач оптимизации процессов управления. Были разработаны такие мощные аналитические и численные методы, как динамическое программирование, градиентные методы, принцип максимума, призванные помочь в преодолении острых аналитических и вычислительных трудностей, возникающих при переходе от учебных примеров к реальным практическим задачам. В основном разработка этих методов стимулировалась вычислительными потребностями, поскольку традиционный подход к решению задач оптимального управления приводит к уравнениям Эйлера или двухточечным граничным задачам, численное решение которых, как правило, далеко не просто.

Трудности, связанные с численным решением двухточечных граничных задач, побуждают к развитию методов, в которых оптимальное решение получается в результате решения некоторой задачи Коши. В этой главе мы попытаемся использовать теорию инвариантного погружения для того, чтобы указать путь, следуя которому решение широкого класса линейных и нелинейных задач оптимизации и оптимального управления можно свести к решению задачи Коши.

Для того чтобы наиболее ясно изложить существо метода, рассмотрим вначале квадратичную вариационную задачу. Построенная для этого случая задача Коши приводит к процедуре интегрирования, дающей оптимальное решение за один проход. Набив руку на квадратичной задаче, мы затем последовательно рассмотрим не-

линейные вариационные задачи, задачи оптимального управления без ограничений и, наконец, задачи оптимального управления с ограничениями. При этом мы нигде не будем пользоваться уравнением Эйлера, принципом оптимальности или принципом максимума Понтрягина.

2. Квадратичная вариационная задача

Рассмотрим задачу минимизации квадратичного функционала

$$I(W) = \int_0^T [\dot{W}^2 + g(y) W^2(y)]\, dy \tag{1}$$

при условиях

$$W(a) = 1, \tag{2}$$

$$W(T) \text{ свободно}, \quad T \text{ фиксировано}. \tag{3}$$

Ясно, что оптимизирующая функция зависит как от y, так и от a:

$$W_{\text{opt}} = u(y, a), \quad a \leqslant y \leqslant T. \tag{4}$$

Как обычно, введем небольшую вариацию оптимального решения:

$$W = u + \varepsilon\eta, \tag{5}$$

где ε — малый параметр, а η — произвольная функция от y, такая, что при $y = a$

$$\eta \big|_{y=a} = 0. \tag{6}$$

Подставляя (5) в (1) и разлагая I в ряд по степеням ε, с помощью несложных рассуждений легко убедиться, что коэффициент при ε должен быть равен нулю, т. е.

$$\int_a^T [\dot{u}\,\dot{\eta} + g\,u\,\eta]\, dy = 0, \tag{7}$$

где

$$(\,\cdot\,) = \frac{d}{dy}.$$

Интегрирование по частям и применение основной лем-

мы вариационного исчисления к уравнению (7) приводит к уравнению Эйлера

$$\ddot{u} - g(y)u = 0 \tag{8}$$

с граничными условиями

$$u(a) = 1, \quad \dot{u}(T) = 0. \tag{9}$$

Мы же воспользуемся совершенно другим подходом, приводящим к решению задачи Коши для определения оптимальной траектории.

3. Задача Коши

Вместо того чтобы интегрировать уравнение (2.7) по частям, воспользуемся тем, что функция вариации η произвольна, и выберем ее в удобном для нас виде. А именно, положим

$$\eta = k(t, y, a), \quad a \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

где

$$k = \begin{cases} y - a, & a \leqslant y \leqslant t, \\ t - a, & t \leqslant y \leqslant T, \end{cases} \tag{2}$$

или

$$k = \min(y - a, \ t - a). \tag{3}$$

Уравнение (2.7) тогда принимает вид

$$u(t, a) = u(a, a) - \int_0^T g(y)\, k(t, y, a)\, u(y, a)\, dy,$$
$$a \leqslant t \leqslant T. \tag{4}$$

Поскольку на оптимальную траекторию наложено условие (2.2), ясно, что (4) является линейным интегральным уравнением Фредгольма второго рода для оптимизирующей функции u. Решение задачи существует и единственно, если $T - a$ достаточно мало. Запишем

$$u(t, a) = 1 - \int_a^T g(y)\, k(t, y, a)\, u(y, a)\, dy. \tag{5}$$

Продифференцировав обе части (5) по a, получим

$$u_a(t, a) = g(a)\,k(t, a, a)\,u(a, a) - \int_a^T g(y)\,k_a(t, y, a)\,u(y, a)\,dy - \int_a^T g(y)\,k(t, y, a)\,u_a(y, a)\,dy. \qquad (6)$$

Упростим это равенство, воспользовавшись (2) и (2.2), и в результате получим линейное интегральное уравнение Фредгольма для u_a

$$u_a(t, a) = \int_a^T g(y)\,u(y, a)\,dy - \int_a^T g(y)\,k(t, y, a)\,u_a(y, a)\,dy, \quad a \leqslant t \leqslant T. \qquad (7)$$

Введя вспомогательную функцию r по формуле

$$r(a) = \int_a^T g(y)\,u(y, a)\,dy, \quad a \leqslant T, \qquad (8)$$

и сравнивая уравнения (5) и (7), получаем

$$u_a(t, a) = r(a)\,u(t, a), \quad a < t. \qquad (9)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение для u с начальным условием

$$u(t, t) = 1, \qquad (10)$$

вытекающим из (2.2). Для полноты задачи Коши нам осталось вывести уравнение для функции r.

Продифференцировав (8) по a, получим

$$r'(a) = -g(a)\,u(a, a) + \int_a^T g(y)\,u_a(y, a)\,dy. \qquad (11)$$

Используя (2.2) и (9), упростим это выражение:

$$r'(a) = -g(a) + r(a)\int_a^T g(y)\,u(y, a)\,dy, \qquad (12)$$

или $$r'(a) = -g(a) + r^2(a), \quad a < T. \tag{13}$$

Начальное условие при $a = T$ вытекает из уравнения (8):

$$r(T) = 0. \tag{14}$$

Уравнения (9), (10), (13) и (14) полностью описывают задачу Коши для определения оптимизирующей функции u. Следует также отметить, что функция $r(a)$ есть не что иное, как $-\dot{u}(a, a)$, т. е. взятый с обратным знаком оптимальный наклон на левом конце траектории. Следовательно, если нужно определить только эту величину, то следует проинтегрировать лишь уравнение (13) с начальным условием (14).

4. Вычислительная схема

Описанная в предыдущем параграфе процедура исключительно удобна для численного определения u, поскольку нам удалось свести решение граничной задачи Эйлера к решению задачи Коши.

Предположим, что мы хотим получить решение на интервале длины $T - a = \alpha > 0$. Процедура решения состоит в интегрировании уравнения (3.13) с известным начальным условием (3.14) на интервале от $a = T$ до $a = t_1$ где t_1 — точка, в которой требуется определить решение. В этой точке добавляется уравнение (3.9) для определения функции $u(t_1, a)$ с начальным условием $u(t_1, t_1) = 1$. Затем полная система интегрируется на интервале от $a = t_1$ до $a = T - \alpha$. Тогда значение $u(t_1, T - \alpha)$ будет оптимальным решением задачи в точке t_1 для процесса длины α. Если, кроме того, требуется определить решение и в других точках $t_2, t_3, \ldots$ из интервала $[\alpha, T]$, то в соответствующих точках добавляются уравнения для $u(t_i, a)$.

5. Простые примеры

Покажем на простом примере с $a = 0$ и $g = 1$, что построенная выше задача Коши полностью эквивалентна исходной задаче. В данном случае мы можем записать явное решение задачи Коши:

$$r(a) = -\operatorname{th}(T - a), \tag{1}$$

$$u(t, a) = \frac{\operatorname{ch}(T - t)}{\operatorname{ch}(T - a)}, \tag{2}$$

что при $a = 0$ превращается в

$$u(t, 0) = \frac{\operatorname{ch}(T - t)}{\operatorname{ch} T}. \tag{3}$$

Это выражение совпадает с решением уравнения Эйлера для данного функционала.

Рассмотрим теперь случай, когда $g = -1$. Уравнение Риккати для вспомогательной функции r теперь имеет вид

$$r'(a) = 1 + r^2, \quad a < T, \tag{4}$$

$$r(T) = 0, \tag{5}$$

а его аналитическое решение есть функция

$$r(a) = -\operatorname{tg}(T - a). \tag{6}$$

Таким образом, мы видим, что r имеет особые точки при $T - a = \pi/2,\ 3\pi/2, \ldots$. В действительности для каждого из этих значений существует сопряженная точка, а уравнение (3.13) можно рассматривать как линейное дифференциальное уравнение Якоби в форме Лежандра для второй вариации. Интересно отметить, что процедура инвариантного погружения включает проверку на наличие сопряженных точек.

6. Распространение и обобщение результатов

Прежде, чем перейти к детальному обсуждению только что описанной теории, отметим кратко некоторые возможности распространения полученных результатов на случай более общих квадратичных и неквадратичных задач.

Минимизация функционала

$$J = \int_0^x [r^2(t) - 2g(t)\, r(t) - \int_0^x k(t, y)\, r(y)\, dy\, r(t)]\, dt \tag{1}$$

приводит к уравнению Эйлера

$$r(t) = g(t) + \int_0^x k(t, y)\, r(y)\, dy, \quad 0 \leqslant t \leqslant x. \qquad (2)$$

Это есть уравнение Фредгольма, которое, как мы показали, можно свести к соответствующей задаче Коши при весьма слабых предположениях о ядре k.

Один из подходов к решению неквадратичных задач состоит в аппроксимации такой задачи последовательностью квадратичных задач. Если мы имеем функционал

$$I(W) = \int_a^T h(\dot{W}, W, y)\, dy, \quad W(a) = c, \qquad (3)$$

то разложение h в ряд до второго члена включительно приводит к уже разобранной выше задаче. Использовав задачу Коши, решим квадратичную вариационную задачу и тем самым получим новое приближение. Разложив подинтегральное выражение в окрестности полученного приближения, продолжим процесс и т. д. В следующих параграфах мы изложим непосредственный подход к решению неквадратичных задач.

7. «Квазиквадратичные» задачи

Промежуточное положение между сравнительно простыми квадратичными задачами и вариационными задачами общего вида занимает важный класс задач, которые мы назовем «квазиквадратичными»[1]). Задачу такого типа можно записать в виде

$$\min_W J(W) = \int_a^T \left[\frac{1}{2}\dot{W}^2(y) + F(W, y)\right] dy, \quad a < T, \qquad (1)$$

$$W(a) = c, \quad W(T) \text{ свободно}. \qquad (2)$$

Такой вид имеют многие задачи математической физики, где F описывает потенциальную, а квадратичный член — кинетическую энергию динамической системы.

[1]) В оригинале «semi-quadratic». — *Прим. перев.*

Применим разработанные ранее процедуры для вывода задачи Коши для функции u, минимизирующей (1) при условии (2). Поскольку функция F теперь может быть и не квадратичной, мы должны учитывать зависимость u как от c, так и от a. Поэтому запишем

$$u = u(y, a, c), \quad a \leqslant y \leqslant T, \quad |c| < \infty. \tag{3}$$

Введем произвольную функцию вариации η, такую, что $\eta(a) = 0$, и запишем

$$W = u + \varepsilon\eta, \tag{4}$$

где ε — некоторый параметр. Подставляя (4) в (1) и рассуждая, как и прежде, получим

$$\int_a^T [\dot{u}\dot{\eta} + F_1(u, y)\eta]\, dy = 0, \tag{5}$$

где

$$F_1(u, y) = \frac{\partial F(u, y)}{\partial u}, \quad (\dot{\ }) = \frac{d}{dy}. \tag{6}$$

Выбирая функцию η в виде $\eta = \min(t - a, \ y - a)$ и учитывая условия (2), получим для u нелинейное интегральное уравнение

$$u(t, a, c) = c - \int_a^T F_1(u, y)\eta\, dy, \ a \leqslant t, \ y \leqslant T, \ |c| < 8. \tag{7}$$

Минимизирующую функцию u следует рассматривать как функцию от c и от a. Будем считать, что длина интервала фиксирована. Продифференцировав уравнение (7) по c и a, получим уравнения

$$u_c(t, a, c) = 1 - \int_a^T \eta(t, y, a) F_{11}(u, y) u_c(y, a, c)\, dy, \tag{8}$$

$$u_a(t, a, c) = \int_a^T F_1(u, y)\, dy - \\ - \int_a^T \eta(t, y, a) F_{11}(u, y) u_a(y, a, c)\, dy, \tag{9}$$

где

$$F_{11}(u, y) = \frac{\partial^2 F(u; y)}{\partial u^2}. \tag{10}$$

Рассматривая эти соотношения как линейные интегральные уравнения Фредгольма для функций u_a и u_c и сравнивая интегралы, мы можем записать

$$u_a(t, a, c) = \left(\int_a^T F_1(u, y)\, dy\right) u_c(t, a, c). \tag{11}$$

Введем новую функцию r:

$$r(c, a) = -\int_a^T F_1(u(y, c, a), y)\, dy, \quad a \leqslant T, \quad |c| < \infty. \tag{12}$$

Продифференцировав r по c и по a, получим

$$r_c(c, a) = -\int_a^T F_{11}(u, y)\, u_c\, dy \tag{13}$$

и

$$r_a(c, a) = F_1(c, a) - \int_a^T F_{11}(u, y)\, u_a\, dy. \tag{14}$$

Используя (11) и (12), перепишем равенство (14) в виде

$$r_a(c, a) = F_1(c, a) - r r_c, \quad a < T. \tag{15}$$

Из уравнения (12) вытекает, что

$$r(c, T) = 0, \tag{16}$$

в то время, как начальное условие для (11) имеет вид

$$u(t, t, c) = c, \quad t \leqslant T. \tag{17}$$

Теперь можно сформулировать задачу Коши. Функция r определяется из решения квазилинейного уравнения с частными производными

$$r_a = F_1(c, a) - r r_c, \quad a < T, \quad |c| < \infty \tag{18}$$

с начальным условием

$$r(c, T) = 0. \tag{19}$$

Функция $u(t, a, c)$ определяется как решение уравнения с частными производными

$$u_a(t, a, c) = -r(c, a) u_c(t, a, c),$$
$$a \leqslant t \leqslant T, \quad |c| < \infty, \quad (20)$$

с начальным условием

$$u(t, t, c) = c. \quad (21)$$

Если функция F_1 достаточно регулярна, а интервал $[a, T]$ достаточно мал, то эта задача Коши, безусловно, имеет единственное решение.

Читатель может легко проверить, что если F квадратична по u, то приведенные выше уравнения сводятся к уравнениям, полученным выше для квадратичного случая.

Описанная в § 4 вычислительная процедура без изменений проходит и в этом случае с тем лишь исключением, что здесь вместо обыкновенных дифференциальных уравнений приходится решать дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка. Как отмечалось в § 6, для этого можно применять различные приближенные методы. В конце главы приведены ссылки на ряд работ, где обсуждаются как оригинальные, так и стандартные методы решения таких уравнений.

8. Уравнения Эйлера и минимальность

На данном этапе для нас важно установить, удовлетворяет ли функция u, вычисленная в результате решения сформулированной выше задачи Коши, уравнению Эйлера, соответствующему функционалу (7.1). Это уравнение имеет вид

$$\ddot{u}(t, a, c) = F_1(u(t, c, a), t), \quad a \leqslant t \leqslant T, \quad (1)$$

$$u(a, a, c) = c, \quad \dot{u}(T, a, c) = 0, \quad (2)$$

где $|a - T|$ достаточно мало.

Прежде всего мы покажем, что левая и правая части уравнения (1), рассматриваемые как функции от a

и c при фиксированном параметре t, удовлетворяют уравнению с частными производными

$$Z_a = -r(c, a) Z_c, \quad a \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

с начальным условием

$$Z(c, t) = F_1(c, t), \quad |c| < \infty . \tag{4}$$

Если это так, то предположение о единственности решения задачи Коши тогда гарантирует выполнение равенства (1).

Продифференцировав (7.20) дважды по t, получаем, что функция $\ddot{u}(t, a, c)$ удовлетворяет уравнению (3). Рассмотрим начальное условие (7.21)

$$u(t, t, c) = c. \tag{5}$$

Продифференцируем (5) по t. Тогда

$$\dot{u}(t, t, c) + u_2(t, t, c) = 0, \tag{6}$$

где точка означает производную по первом аргументу, а нижний индекс «2» — по второму. Учитывая (7.20), перепишем (6) в виде

$$\dot{u}(t, t, c) - r(c, t) u_c(t, t, c) = 0. \tag{7}$$

Учитывая (5), можно записать

$$\dot{u}(t, t, c) = r(c, t). \tag{8}$$

Продифференцировав (8) по t, получаем

$$\ddot{u}(t, t, c) + \dot{u}_2(t, t, c) = r_t(c, t). \tag{9}$$

Аналогично, дифференцируя (7.20) по t, приходим к равенству

$$\dot{u}_2(t, t, c) = -r(c, t)\dot{u}_c(t, t, c) = -r(c, t) r_c(c, t). \tag{10}$$

Поскольку

$$r_t(c, t) = F_1(c, t) - r(c, t) r_c(c, t), \tag{11}$$

то (9) принимает вид

$$\ddot{u}(t, t, c) = F_1(c, t), \tag{12}$$

что и является требуемым условием для $\ddot{u}$ при $a = t$.

Рассмотрим теперь правую часть уравнения (1)

$$W(c, a) = F_1(u(t, c, a), t), \quad a < t, \tag{13}$$

считая t просто параметром. Ясно, что

$$W(c, t) = F_1(u(t, t, c), t) = F_1(c, t). \tag{14}$$

Продифференцировав (13) по a и по c, получаем

$$W_a = F_1(u, t)\, u_a = F_1(u, t)\, [-r u_c], \tag{15}$$

$$W_c = F_1(u, t)\, u_c. \tag{16}$$

Отсюда вытекает, что W удовлетворяет требуемому уравнению с частными производными

$$W_a = -r W_c. \tag{17}$$

Это завершает вывод уравнения Эйлера. Первое граничное условие в (2) дается формулой (7.21).

Рассмотрим, наконец, свободное граничное условие из уравнения (2). Продифференцируем (7.20) по t и положим $t = T$. В результате получаем однородное уравнение с частными производными

$$\dot{u}_a(T, a, c) = -r\,(c, a)\,\dot{u}_c(T, a, c), \quad a < T. \tag{18}$$

Заметим, что

$$\dot{u}(T, T, c) = r(c, T) = 0, \tag{19}$$

поэтому в силу единственности решения получаем

$$\dot{u}(T, a, c) = 0. \tag{20}$$

Итак, решение задачи Коши действительно удовлетворяет уравнению Эйлера (1) с граничными условиями (2).

9. Уравнение Беллмана — Гамильтона — Якоби

Как еще одно подтверждение эквивалентности задачи Коши, построенной в § 7, исходной задаче, покажем, что подставив функцию u, являющуюся решением задачи Коши, в функционал J в (1), мы придем к решению уравнения Беллмана — Гамильтона — Якоби.

Введем функцию f следующим образом:

$$f(c, a) = \min_{w} J(w). \tag{1}$$

Принцип оптимальности Беллмана непосредственно приводит к уравнению с частными производными

$$-f_a = F(c, a) - (1/2) f_c^2, \quad a < T. \tag{2}$$

Начальное условие при $a = T$ имеет вид

$$f(c, T) = 0. \tag{3}$$

Уравнение (2) является уравнением Беллмана—Гамильтона — Якоби для функционала (7.1). Мы должны показать, что если мы подставим функцию u в (7.1), то результирующий функционал будет удовлетворять уравнениям (2) и (3).

Пусть функция I задается равенством

$$I(c, a) = J(u), \tag{4}$$

где u определяется уравнениями (7.18) — (7.21). Используя (7.11) и задачу Коши из § 7, получаем, что

$$-I_a = (1/2) r^2(c, a) + F(c, a) + r(c, a) I_c. \tag{5}$$

Остается лишь показать, что

$$-I_c = r(c, a). \tag{6}$$

Введем функцию M:

$$M(c, a) = -J_c = -\int_a^T [u u_c + F_1 u_c]\, dy. \tag{7}$$

Дифференцируя, получаем

$$M_c = -\int_a^T [\dot{u}\dot{u}_{cc} + (\dot{u}_c)^2 + F_1 u_{cc} + F_{11}(u_c)^2]\,dy, \qquad (8)$$

$$M_a = \dot{u}(a, a, c)\,\dot{u}_c(a, a, c) + F_1(c, a)\,u_c(a, a, c) - \\ - \int_a^T [\dot{u}\dot{u}_{ac} + \dot{u}_c\dot{u}_a + F_1 u_{ac} + F_{11} u_a u_c]\,dy. \qquad (9)$$

Теперь легко можно проверить, что M удовлетворяет линейному уравнению с частными производными

$$M_a = rr_c + F_1(c, a) - rM_c - r_c M \qquad (10)$$

с начальным условием

$$M(c, T) = 0. \qquad (11)$$

Единственным решением этого уравнения является функция

$$M(c, a) = r(c, a), \quad a \leqslant T, \qquad (12)$$

что и требовалось доказать.

10. Задачи оптимального управления

В связи с появлением вычислительных машин и развитием космических полетов было предпринято много попыток переформулировать задачу оптимального управления в терминах задачи Коши. В противоположность этому подходу, широко применяемые непрямые методы вариационного исчисления и принцип максимума Понтрягина приводят к необходимости решения граничных задач. Эти задачи бывает трудно решить численно, и, кроме того, они часто неустойчивы.

В этом параграфе мы используем наши прежние идеи для построения некоторой задачи Коши, решение которой определяет оптимальную траекторию задачи оптимального управления. Здесь мы распространяем наш подход на случай вариационных задач с дифференциальными ограничениями.

В последующих параграфах мы рассмотрим задачи с фазовыми ограничениями и ограничениями на управления.

Итак, перейдем к рассмотрению следующей задачи:

$$\min I(w) = \int_a^T f(t, y, w)\, dt \tag{1}$$

с уравнением движения

$$\frac{dy}{dt} = g(t, y, w), \quad a \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

$$y(a) = c. \tag{3}$$

Пусть

$$u = u(t, a, c), \quad a \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

является оптимальным управлением, а

$$x = x(t, a, c), \quad a \leqslant t \leqslant T \tag{5}$$

— оптимальной траекторией. Как и ранее, будем предполагать, что время T фиксировано. Приступим теперь к построению задачи Коши для определения x и u.

11. Предварительные рассуждения

Произвольная допустимая вариация управления вида

$$w = u + \varepsilon v \tag{1}$$

и вариация соответствующей траектории

$$y = x + \varepsilon \eta, \tag{2}$$

где ε — произвольный параметр, приводят к необходимому условию оптимальности вида

$$\int_a^T [f_y(t, x, u)\eta + f_w(t, x, u)v]\, dt = 0 \tag{3}$$

с ограничениями

$$\dot{\eta} = g_x(t, x, u)\eta + g_u(t, x, u)v, \tag{4}$$

$$\eta(a) = 0. \tag{5}$$

Из уравнения (4) следует, что для произвольной функции $\lambda(t)$ справедливо равенство

$$\lambda(t)[-\dot{\eta}+g_y(t,x,u)\eta+g_w(t,x,u)v]=0. \qquad (6)$$

Прибавив левую часть (6) к подинтегральному выражению в (3), получим

$$\int_a^T \{[f_y(t',x,u)+g_y(t',x,u)\lambda]\eta-\dot{\eta}\lambda+$$
$$+[f_w(t',x,u)+g_w(t',x,u)\lambda]v\}\,dt'=0. \qquad (7)$$

Мы можем выбрать функцию λ таким образом, чтобы коэффициент при v в уравнении (7) стал равным нулю, т. е.

$$f_w(t',x,w)+g_w(t',x,w)\lambda\big|_{w=u}=0, \quad a\leqslant t'\leqslant T. \qquad (8)$$

Если λ удовлетворяет соотношению (8), то (7) принимает вид

$$\int_a^T \{[f_y(t',x,u)+g_y(t',x,u)\lambda]\eta-\dot{\eta}\lambda\}\,dt'=0. \qquad (9)$$

Поскольку вариация η может зависеть как от a и c, так и от t, то, продифференцировав (9) по a и c, получим

$$[\{f_y(t,x,u)+g_y(t,x,u)\lambda\}\eta-\dot{\eta}\lambda]_{t=a}+\int_a^T [\{f_{yx}x_a+f_{yu}u_a+$$
$$+(g_{yx}x_a+g_{yu}u_a)\lambda+g_y\lambda_a\}\eta+$$
$$+\{f_y+g_y\lambda\}\eta_a-(\dot{\eta}_a\lambda+\dot{\eta}\lambda_a)]\,dt=0, \qquad (10)$$

$$\int_a^T [\{f_{yx}x_c+f_{yu}u_c+(g_{yx}x_c+g_{yu}u_c)\lambda+g_y\lambda_c\}\eta+$$
$$+(f_y+g_y\lambda)\eta_c-(\dot{\eta}_c\lambda+\dot{\eta}\lambda_c)]\,dt=0. \qquad (11)$$

Эти соотношения понадобятся нам в дальнейшем.

12. Переходная инвариантность[1])

Для вывода уравнений для определения оптимальных функций x и u перейдем сейчас к обсуждению одного фундаментального принципа теории инвариантного погружения, который мы назовем принципом переходной инвариантности.

Рассмотрим оптимальную траекторию, начинающуюся в точке (a, c) и заканчивающуюся в конечной точке в момент T. При переходе от точки на траектории в момент a, к точке, соответствующей моменту $a+\Delta$, происходят следующие изменения:

$$a \to a+\Delta, \tag{1}$$

$$c \to c+\dot{x}(a, a, c)\Delta \tag{2}$$

с точностью до $O(\Delta^2)$. Этот факт позволяет записать

$$u(t, a, c) = u(t, a+\Delta, c+\dot{x}(a, a, c)\Delta) + O(\Delta^2), \tag{3}$$

$$\dot{x}(t, a, c) = x(t, a+\Delta, c+\dot{x}(a, a, c)\Delta) + O(\Delta^2), \tag{4}$$

где

$$\Delta > 0, \quad a+\Delta \leqslant t \leqslant T.$$

Уравнения (3) и (4) выражают простое свойство переходной инвариантности, которым обладают оптимальное управление и оптимальная траектория. Обозначим для упрощения записи через p наклон оптимальной траектории в начальной точке:

$$p(a, c) = \dot{x}(a, a, c). \tag{5}$$

Тогда для достаточно гладких u и x можно записать предельный вид уравнений (3) и (4) при $\Delta \to 0$ так:

$$u_a(t, a, c) = -p(a, c)\, u_c(t, a, c), \tag{6}$$

$$x_a(t, a, c) = -p(a, c)\, x_c(t, a, c), \quad a \leqslant t \leqslant T. \tag{7}$$

---

[1]) В оригинале «translational invariance». — *Прим. перев.*

Применив тот же принцип к функции λ, получим

$$\lambda_a(t, a, c) = -p(a, c)\lambda_c(t, a, c), \quad a \leqslant t \leqslant T. \qquad (8)$$

Начальное условие для x при $a = t$ имеет вид

$$x(t, t, c) = c, \qquad (9)$$

а начальные условия на u и λ будут указаны позже.

13. Уравнения для *p*

Из уравнения движения (10.2) следует, что

$$\dot{x}(t, a, c) = g(t, x(t, a, c), u(t, a, c)). \qquad (1)$$

Поэтому, полагая $t = a$, получаем

$$p(a, c) = g(a, c, q(a, c)), \qquad (2)$$

где

$$q(a, c) = u(a, a, c). \qquad (3)$$

Для вывода уравнения для q запишем уравнение (11.8) при $t = a$:

$$f_w(a, c, q(a, c)) + g_w(a, c, q(a, c))\lambda(a, a, c) = 0. \qquad (4)$$

Таким образом, если мы получим уравнение для $\lambda(a, a, c)$, то тем самым замкнем систему уравнений задачи Коши, поскольку q тогда можно будет получить из уравнения (4), а p — из уравнения (2).

Определим для удобства

$$\lambda(a, a, c) = \gamma(a, c). \qquad (5)$$

Подставим выражения (12.6) и (12.7) в (11.10), затем подставим (11.11) в получившееся выражение и упростим то, что получится, выбрав вариацию η в виде

$$\eta = t - a, \quad a \leqslant t \leqslant T. \qquad (6)$$

В результате получаем

$$\lambda(a, a, c) - \int_a^T [p(a, c)\lambda_c - (f_y + g_y\lambda) + \lambda_a]dt = 0. \qquad (7)$$

Воспользовавшись уравнением (12.8), приведем это равенство к виду

$$\gamma(a, c) = \lambda(a, a, c) = \int_a^T (f_y + g_y\lambda)\,dt. \tag{8}$$

Продифференцируем далее обе части (7) по a и c. В результате придем к соотношениям

$$\begin{aligned}\gamma_a(a, c) = &-[f_y(a, x(a, a, c), u(a, a, c)) + \\ &+ g_y(a, x(a, a, c), u(a, a, c))\lambda(a, a, c)] + \\ &+ \int_a^T [f_{yx}x_a + f_{yu}u_a + (g_{yx}x_a + g_{yu}u_a)\lambda + \\ &+ g_y\lambda_a]\,dt,\end{aligned} \tag{9}$$

$$\gamma_c(a, c) = \int_a^T [f_{yx}x_c + f_{yu}u_c + (g_{yx}x_c + g_{yu}u_c)\lambda + g_y\lambda_c]\,dt. \tag{10}$$

Используя определения p и q и начальное условие на x, приведем (9) к виду

$$\begin{aligned}\gamma_a(a, c) = &-[f_y(a, c, q(a, c)) + \\ &+ g_y(a, c, q(a, c))\gamma(a, c)] - p(a, c)\int_a^T [f_{yx}x_c + \\ &+ f_{yu}u_c + (g_{yx}x_c + g_{yu}u_c)\lambda + g_y\lambda_c]\,dt.\end{aligned} \tag{11}$$

Отметим, что уравнение (10) можно записать так:

$$\begin{aligned}\gamma_a(a, c) + p(a, c)\gamma_c(a, c) + g_y(a, c, q)\gamma(a, c) + \\ + f_y(a, c, q) = 0.\end{aligned} \tag{12}$$

Из уравнения (8), очевидно, следует, что

$$\gamma(T, c) = 0. \tag{13}$$

14. Полное описание задачи Коши

Поскольку предыдущие рассуждения были довольно нетривиальными, приведем последовательное описание задачи Коши для определения оптимального управления u и соответствующей оптимальной траектории x.

Уравнения для определения x и u имеют вид

$$x_a(t, a, c) = -p(a, c)\,x_c(t, a, c), \tag{1}$$

$$u_a(t, a, c) = -p(a, c)\,u_c(t, a, c), \quad a \leqslant t \leqslant T. \tag{2}$$

Начальными условиями при $a = t$ являются

$$x(t, t, c) = c, \tag{3}$$

$$u(t, t, c) = q(t, c). \tag{4}$$

Вспомогательные функции p и q определяются из следующей системы уравнений с частными производными и соответствующих граничных условий:

$$\gamma_a(a, c) = -p(a, c)\,\gamma_c(a, c) + \\ + g_y(a, c, q)\,\gamma(a, c) + f_y(a, c, q), \quad a \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

$$\gamma(T, c) = 0, \tag{6}$$

$$f_w(a, c, q) + g_w(a, c, q)\,\gamma(a, c) = 0, \tag{7}$$

$$p(a, c) = g(a, c, q). \tag{8}$$

Во избежание недоразумений следует помнить, что g_y обозначает частную производную g по второму аргументу, а g_w — по третьему. Аналогичные обозначения используются для функции f.

Нетрудно показать, что если уравнение движения линейно, а подинтегральное выражение (10.1) квадратично, то только что описанная задача Коши становится системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Отметим также, что можно легко распространить полученные результаты и на векторно-матричный случай. Однако в этом случае следует обратить особое внимание на вычисление функций p и q, поскольку, вообще говоря, для их определения придется решать системы нелинейных уравнений.

15. Квадратичные задачи с линейными уравнениями движения

Для иллюстрации описанного выше метода рассмотрим задачу минимизации квадратичного функционала

$$I(w, y) = \int_a^T \left(\frac{1}{2} w^2 + g(t) y^2 \right) dt \tag{1}$$

с линейными уравнениями движения

$$\frac{dy}{dt} = b(t) y + d(t) w, \quad y(a) = c. \tag{2}$$

Введенные в предыдущем параграфе функции f и g теперь принимают вид

$$f(t, y, w) = \frac{1}{2} (w^2 + g(t) y^2), \tag{3}$$

$$g(t, y, w) = b(t) y + d(t) w. \tag{4}$$

Уравнение (14.8) для $p(a, c)$ принимает вид

$$p = b(a) c + d(a) q(a, c), \tag{5}$$

а уравнение (14.7) для q сводится к

$$q(a, c) + d(a) \gamma(a, c) = 0. \tag{6}$$

Линейность задачи позволяет разделить переменные в уравнениях с частными производными для x, u и γ. Теперь мы можем записать

$$x(t, a, c) = cX(t, a), \tag{7}$$

$$u(t, a, c) = cU(t, a), \tag{8}$$

$$\gamma(a, c) = cG(a). \tag{9}$$

Уравнения для определения X, U и G имеют вид

$$X_a(t, a) = [d^2(a) G(a) - b(a)] X(t, a), \tag{10}$$

$$U_a(t, a) = [d^2(a) G(a) - b(a)] U(t, a), \tag{11}$$

$$G'(a) = -g(a) + d^2(a) G^2(a). \tag{12}$$

При этом начальные условия таковы:

$$X(t, t) = 1, \tag{13}$$

$$U(t, t) = -d(t)G(t), \tag{14}$$

$$G(T) = 0. \tag{15}$$

Заметим, что уравнения (10) — (15) образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой начальные условия заданы, а t рассматривается как параметр.

16. Задачи оптимального управления с ограничениями и принцип максимума Понтрягина

В оставшихся параграфах мы введем еще один усложняющий элемент в задачи, которые мы рассматривали до сих пор. А именно, мы займемся задачами оптимального управления с ограничениями на управляющие переменные. Эти ограничения вполне естественно возникают во многих случаях и часто соответствуют той ситуации, когда управляющие переменные описывают количество имеющихся ресурсов. Ясно, что в этом случае эти ограничения просто отражают тот факт, что для управления системой мы не можем тратить больше, чем у нас есть. Разумеется, существует множество типов ограничений такого рода, однако, мы рассмотрим лишь случай, когда управление просто ограничено по абсолютной величине. Затем мы укажем некоторые многообещающие подходы к решению более общих задач таких, как задачи с нестационарными ограничениями, с фазовыми ограничениями и т. д.

Класс задач, который мы подробно рассматриваем, относится к тому типу задач оптимального управления с ограничениями, для анализа которых обычно привлекается принцип максимума Понтрягина. Соответствующую данному случаю задачу Коши можно рассматривать как распространение классической теории Гамильтона — Якоби на вариационные задачи с ограничениями.

Обозначим значение переменной состояния системы в момент времени t через y и запишем уравнения движения в виде

$$\dot{y} = g(y, w), \quad a \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

$$y(a) = c, \quad |c| < \infty, \tag{2}$$

где w — переменная управления. Предположим, что на управление наложено ограничение

$$|w| \leqslant M, \ a \leqslant t \leqslant T, \ M \text{ — действительное число.} \tag{3}$$

Функционал, который требуется минимизировать, имеет вид

$$I = \int_a^T f(y, w)\, dt. \tag{4}$$

Целью управления, естественно, является выбор управления w, удовлетворяющего ограничению (3) и минимизирующего I. Мы будем предполагать, что функции f и g достаточно гладкие на достаточно малом интервале $[a, T]$, так что применение дальнейших операций обосновано.

В соответствии с принципом максимума Понтрягина решение данной задачи можно получить, введя переменную λ и функцию H, такие, что

$$H(y, w, \lambda) = f(y, w) + \lambda g(y, w), \tag{5}$$

и решая двухточечную граничную задачу

$$\dot{y} = H_\lambda = g(y, w), \tag{6}$$

$$-\dot{\lambda} = H_y = f_y(y, w) + \lambda g_y(y, w), \quad a \leqslant t \leqslant T, \tag{7}$$

$$y(a) = c, \tag{8}$$

$$\lambda(T) = 0, \tag{9}$$

где

$$\min_{|z| \leqslant M} H(y, z, \lambda) = H(y, w, \lambda). \tag{10}$$

Наша цель состоит в сведении решения этой граничной задачи к решению соответствующей задачи Коши.

17. Построение задачи Коши

Зафиксируем конечный момент T и будем рассматривать начальный момент a, $a \leqslant T$, и начальное состояние c, $|c| < \infty$, как переменные. Введем функцию минимума F:

$$F(c, a) = \min_{|w| \leqslant M} \int_a^T f(y, w)\, dt, \tag{1}$$

где переменные состояния и управления удовлетворяют уравнению движения (16.1) и начальному условию (16.2). В соответствии с принципом оптимальности Беллмана функция F удовлетворяет следующему уравнению с частными производными:

$$F_a(c, a) = \min_{|z| \leqslant M} [f(c, z) + g(c, z) F_c(c, a)], \quad a \leqslant T, \tag{2}$$

с начальным условием

$$F(c, T) = 0. \tag{3}$$

Обозначим минимизирующее значение z для каждого значения a и c через

$$z_{\min} = r(c, a), \; a \leqslant T, \quad |c| < \infty. \tag{4}$$

Чтобы подчеркнуть, что y, w и λ являются функциями от c и a, еще раз запишем

$$y = y(t, a, c), \tag{5}$$

$$w = w(t, a, c), \tag{6}$$

$$\lambda = \lambda(t, a, c). \tag{7}$$

Введенный выше принцип переходной инвариантности приводит к равенству

$$y(t, a, c) = y(t, a + \Delta, c + g(c, r(c, a)) \Delta) + O(\Delta). \tag{8}$$

Предельная форма (8) имеет вид

$$y_a(t, a, c) = -g(c, r(a, c))\, y_c(t, a, c), \quad a < t < T, \quad |c| < \infty. \tag{9}$$

Кроме того, функции w и λ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению:

$$w_a(t, a, c) = -g(c, r(c, a))\, w_c(t, a, c), \tag{10}$$

$$\lambda_a(t, a, c) = -g(c, r(c, a))\, \lambda_c(t, a, c). \tag{11}$$

Начальные условия для y, w и λ имеют вид

$$y(t, t, c) = c, \tag{12}$$

$$w(t, t, c) = r(t, c), \tag{13}$$

$$\lambda(t, t, c) = F_c(c, t), \quad |c| < \infty. \tag{14}$$

18. Замечания

Из предыдущих параграфов становится ясно, что при рассмотрении задач оптимального управления с ограничениями мы должны несколько ограничить себя теми из них, которые позволяют воспользоваться методом динамического программирования для определения основной вспомогательной функции. Будем надеяться, что будущие исследования помогут построить метод вычисления этой функции без обращения к другим процедурам оптимизации. Тем не менее изложенный подход подтверждает то обстоятельство, что от комбинированных методов можно ожидать лучших результатов, чем от слепого следования тому или иному методу. Так, метод динамического программирования позволяет легко получить функцию r и сталкивается с трудностями при определении w; с другой стороны, с помощью инвариантного погружения легко находится траектория w, однако появляются трудности при вычислении r. Поэтому комбинация этих двух методов приведет, вероятно, к эффективному алгоритму. Можно надеяться, что та же идея может быть применена и к задачам, содержащим фазовые ограничения в форме неравенств или учитывающим различные стохастические аспекты и т. д.

Замечания и литература

§ 1. Стандартные методы оптимизации, такие, как вариационное исчисление, динамическое программирование и принцип максимума, изложены в книгах

Гельфанд И. М., Фомин С. В., Вариационное исчисление, Физматгиз, М., 1961.

Беллман Р., Дрейфус С., Прикладные задачи динамического программирования, М., изд-во «Наука», 1965.

Понтрягин Л. С. и др., Математическая теория оптимальных процессов, 2-е изд., изд-во «Наука», М., 1969.

§ 2. Глубокий анализ задачи оптимального управления с квадратичным функционалом и линейными уравнениями движения проведен в книге[1])

Беллман Р. (Bellman R.), Introduction to the mathematical theory of control processes, V. 1, Academic Press, New York, 1967.

§ 6. Методы аппроксимации неквадратичных критериев приведены в книге

Беллман Р., Калаба Р., Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи, «Мир», М., 1968.

§§ 7—9. Эти результаты впервые получены в работе

Касти, Калаба, Вереке (Casti J., Kalaba R., Vereeke B.), Invariant imbedding and a class of variational problems, *J. Opt. Theory and Appl.*, 3, Feb. (1969), No. 2.

Интересное изложение применения вариационного исчисления в механике содержится в книге

Ланцош К., Вариационные принципы механики, «Мир», М., 1965.

---

[1]) См. также Красовский Н. Н., Теория управления движением, изд-во «Наука», 1968. — *Прим. перев.*

§ 12. Принцип переходной инвариантности можно рассматривать как перенесение фундаментального полугруппового свойства единственного решения на задачи Коши.

§ 15. Определяющими работами по приложению динамического программирования к процессам управления явились книги

Беллман Р., Процессы регулирования с адаптацией, М., изд-во «Наука», 1964.

Дрейфус (Dreyfus S.), Dynamic programming and the calculus of variations, Academic Press, New York, 1965.

Вычислительные аспекты динамического программирования обсуждаются в книге[1])

Ларсон Р. (Larson R.), State increment dynamic programming, American Elsevier Co., New York, 1970.

Там же приведены многочисленные примеры из различных областей.

[1]) См. рецензию в журнале «Автоматика и телемеханика», № 3, 1970, стр. 187. — *Прим. перев.*

Глава 6

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИЧЕСКИМ НАУКАМ

1. Введение

Ценность любой теории проверяется тем, насколько она приложима к решению различных классов практически важных задач. В этой главе мы хотим переключиться с теоретических исследований на приложения теории к конкретным физическим явлениям. Как это обычно бывает, физические задачи, с которыми мы имеем дело, вовсе не всегда целиком укладываются в рамки описанной теории. Поэтому мы вынуждены вводить в предыдущие результаты небольшие изменения, оставляя основные идеи неизменными. Однако эти изменения полезны и сами по себе, поскольку они способствуют усилению теории и хорошо иллюстрируют полезные приемы решения конкретных задач.

Приведенные ниже примеры отобраны по принципу разнообразия и их интереса с точки зрения физики и являются типичными для тех классов задач, к которым можно применять теорию инвариантного погружения. Мы хотим показать применимость этой теории к многим различным ситуациям и развеять существующее мнение о том, что инвариантное погружение есть некоторый метод, применимый лишь в какой-то узко специальной области, такой, как теория переноса нейтронов.

В соответствии с этим намерением наш первый пример взят из теории распространения излучения в атмосфере. Мы рассмотрим задачу определения функции источника для плоско-параллельной атмосферы, ограниченной поглощающим слоем. Рассмотрим мы и случай, когда она ограничена зеркальным отражателем. Мы покажем, что описанные в гл. 4 методы дают вполне удовлетворительное решение обеих задач.

Второе приложение относится к области аналитической механики. Пользуясь результатами гл. 3, мы еще раз рассмотрим уравнения Гамильтона для динамических систем и получим некоторые новые уравнения механики. Затем в качестве наглядного примера их использования мы применим их к классическому гармоническому осциллятору. Рассмотрим мы также и задачу о равновесии тонкого стержня.

Выделение полезного сигнала при наличии шумов вызывает значительный интерес во многих областях научной деятельности. Мы покажем, что интегральные уравнения Фредгольма играют центральную роль в многих этих исследованиях, и продемонстрируем, как можно использовать разработанную в гл. 4 теорию для получения новых схем фильтрации. Мы укажем также применение наших идей к детектированию полезных сигналов при наличии окрашенных шумов.

При изучении электромагнитных полей в металлических пластинах и полупроводниках конечной толщины приходится принимать во внимание нелокальное взаимодействие волн. В нашем последнем примере мы построим задачу Коши для решения интегро-дифференциальных уравнений, описывающих нелокальное взаимодействие волн.

2. Функция источника

При изучении планетарных полей излучения центральную роль играет функция источника. Знания функции источника достаточно для определения отраженной, переданной и собственной интенсивности излучения, а также и других величин, представляющих физический интерес. Поэтому мы покажем, каким образом теорию инвариантного погружения можно применить для построения задачи Коши для отыскания этой важной функции.

Рассмотрим однородную плоско-параллельную атмосферу конечной толщины x, освещенную сверху параллельным потоком интенсивности π, падающим под углом $\arccos z$ к направленной вниз нормали, $0 \leqslant z \leqslant 1$. Предположим, что среда поглощает и рассеивает излучение изотропно, а альбедо одноактного рассеяния есть λ. Обозначим функцию источника на высоте t через $J\ (t,\ x,\ z)$, $0 \leqslant$

$\leqslant t \leqslant x$. Физически J представляет собой интенсивность рождения частиц в единичном объеме на единичный телесный угол на высоте t для среды толщины x при освещении параллельным пучком, падающим под углом arccos z.

Предполагая, что вероятность столкновения при прохождении частицей тонкого слоя толщиной $\Delta \ll 1$ подчиняется распределению Пуассона, легко можно показать, что J удовлетворяет интегральному уравнению

$$J(t, x, z) = (\lambda/4) e^{-(x-t)/z} + (\lambda/2) \int_0^x E_1(|t-y|) J(y, x, z)\, dy,$$
$$0 \leqslant t \leqslant x, \ 0 \leqslant \lambda, \ z \leqslant 1. \quad (1)$$

В уравнении (1) предполагается, что атмосфера ограничена идеально поглощающей границей. Физически первый член в правой части (1) описывает падающее излучение, приходящее на высоту t, не испытывая при этом взаимодействия, и взаимодействующее первый раз на высоте t. Интегральный член возникает в том случае, когда частицы рождаются на высоте y, не испытывая взаимодействий, приходят на высоту t и здесь вступают во взаимодействие. Функция $E_1(r)$ есть вероятность прохождения расстояния $r > 0$ без взаимодействия и зависит только от расстояния между рассматриваемыми точками.

3. Задача Коши для J

Поскольку ядро уравнения (2.1) можно записать в виде

$$\frac{\lambda}{2} E_1(|t-y|) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 e^{-|t-y|/z} dz/z, \quad (1)$$

то, очевидно, интегральное уравнение для J относится к уравнениям того типа, что мы рассматривали в гл. 4. Возвращаясь к уравнению (2.2) из гл. 4, мы видим, что соответствующая весовая функция для приведенной там задачи Коши имеет вид

$$w(z) = \frac{\lambda}{2z}. \quad (2)$$

В силу линейности уравнения (2.1) функция источника J в данном случае получается из вспомогательной функции J из гл. 4 умножением на $(\lambda/4)$.

С учетом этого замечания из (2) следует, что задача Коши для данной функции источника имеет вид

$$X_x(x, z) = (\lambda/2)\; Y\;(x, z) \int_0^1 Y(x, z')\, dz'/z', \tag{3}$$

$$Y_x(x, z) = -\frac{1}{z} Y(x, z) + (\lambda/2) X(x,z) \int_0^1 Y(x, z')\, dz'/z', \tag{4}$$

$$J_x(t, x, z) = -\frac{1}{z} J(t, x, z) +$$

$$+ (\lambda/2)\, X(x, z) \int_0^1 J(t, x, z')\, dz'/z', \tag{5}$$

$$X(0, z) = 1, \tag{6}$$

$$Y(0, z) = 1, \tag{7}$$

$$J(t, t, z) = (\lambda/4)\, X(t, z), \quad 0 \leqslant t \leqslant x, \quad 0 \leqslant \lambda, \ z \leqslant 1. \tag{8}$$

Уравнения (3)—(8) можно свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и затем численно проинтегрировать с помощью процедуры, описанной в гл. 4.

Интересно отметить, что вспомогательные функции X и Y, которые ранее были введены из чисто математических соображений, в данном случае имеют четкий физический смысл. А именно, они описывают интенсивность рождения частиц на верхней и нижней границах атмосферы соответственно. В результате мы получаем, что если представляют интерес лишь явления на границах, то нам не требуется никакой информации о процессах, протекающих внутри среды. Таким образом, можно считать, что наша теория оперирует с теми величинами, которые физики называют «наблюдаемыми».

4. Внешние и внутренние поля излучения

Поскольку у нас есть способ вычисления функции источника J, мы можем, как отмечалось выше, определить и другие интересующие нас функции. Пусть, например, $r(v, z, x)$ обозначает интенсивность излучения, отраженного от верхней границы атмосферы толщины x под углом $\arccos v$ и порожденного излучением, падающим в направлении $\arccos z$. Пусть при этом $t(v, z, x)$ обозначает интенсивность прошедшего излучения. Простые физические соображения позволяют записать

$$r(v, z, x) = \frac{1}{v} \int_0^x J(y, x, z)\, e^{-(x-y)/v}\, dy, \qquad (1)$$

$$t(v, z, x) = \frac{1}{v} \int_0^x J(y, x, z)\, e^{-y/v}\, dy. \qquad (2)$$

Легко можно построить задачи Коши для функций r и t или, что более удобно, для функций $R = vr$ и $T = vt$. Более подробно мы обсудим этот вопрос несколько позже.

Соотношения, аналогичные (1) и (2), можно получить и для функций, описывающих интенсивность излучения внутри атмосферы. Пусть $J(t, \pm v, x, z)$ обозначает интенсивность диффузного излучения на высоте t под углом $\arccos v$ к направленной вверх нормали, а x и t имеют тот же смысл, что и ранее. Знак «$+$» соответствует распространению излучения вверх, а знак «$-$» — вниз. Соответствующие соотношения имеют вид

$$I(t, +v, x, z) = \frac{1}{v} \int_0^t e^{-(t-y)/v} J(y, x, z)\, dy, \qquad (3)$$

$$I(t, -v, x, z) = \frac{1}{v} \int_t^x e^{-(y-t)/v} J(y, x, z)\, dy. \qquad (4)$$

В литературе, приведенной в конце этой главы, можно найти формулировки задач Коши для этих величин и соответствующие численные результаты.

5. Отражающие поверхности

Обобщим теперь предыдущий пример на тот случай, когда атмосфера ограничена снизу идеальной отражающей поверхностью. Эта задача проиллюстрирует применение инвариантного погружения в случае более сложных граничных условий. Результаты для процессов, подчиняющихся анизотропным законам рассеивания, изложены в литературе, приведенной в конце этой главы.

Рассмотрим ту же атмосферу, что и выше, но ограниченную идеально отражающей поверхностью, характеризующейся функцией $\rho(v)$, $0 \leqslant v \leqslant 1$, которая представляет собой вероятность того, что частица, падающая под углом $\arccos v$ на нижнюю поверхность, идеально отражается. Обозначив, как и выше, функцию источника через $J(t, x, z)$, из естественных физических соображений получим уравнение

$$J(t, x, z) = \frac{\lambda}{4}\left[e^{-(x-t)/z} + \rho(z)\, e^{-(x+t)/z}\right] +$$

$$+ \frac{\lambda}{2}\int_0^x [E_1(|t-y|) + f(t+y)]\, J(y, x, z)\, dy, \qquad (1)$$

где

$$E_1(s) = \int_0^1 e^{-s/z'}\, dz'/z',$$

$$f(s) = \int_0^1 e^{-s/z'}\, \rho(z')\, dz'/z', \quad s > 0.$$

Вместо того, чтобы снова выводить задачу Коши для J, покажем сейчас, как можно построить задачу Коши для интенсивностей отраженной и пропущенной волны.

Пусть

$r(v, z, x)$ — интенсивность излучения, диффузно отраженного под углом $\arccos v$.

Функция отражения r выражается через функцию источника f следующим образом:

$$r(v,\ z,\ x) = \frac{1}{v} \int_0^x J(y,\ x,\ z) \left[e^{-(x-y)/v} + \rho(v) e^{-(x+y)/v} \right] dy. \tag{2}$$

Введем для удобства величину R, определенную так:

$$R(v,\ z,\ x) = vr(v,\ z,\ x). \tag{3}$$

Функция преломления τ определяется следующим образом:

$\tau(v, z, x)$ — интенсивность диффузного излучения на нижней границе атмосферы в направлении, образующем угол $\arccos v$ с направленной вниз нормалью к зеркально отражающей границе.

Функция τ выражается через J по формуле

$$\tau(v,\ z,\ x) = \frac{1}{v} \int_0^x e^{-y/v} J(y,\ x,\ z)\, dy. \tag{4}$$

Введем также функцию T:

$$T(v,\ z,\ x) = v\tau(v,\ z,\ x). \tag{5}$$

Построим теперь задачи Коши для функций R и T, рассматривая x как независимую переменную.

6. Отражение и преломление

Дифференцируя (5.3) по x, получаем

$$R_x(v,\ z,\ x) = J(x,\ x,\ z)\left[1 + \rho(v) e^{-2x/v}\right] - \frac{1}{v} R(v,\ z,\ x) + \int_0^x J_x(y,\ x,\ z) \left[e^{-(x-y)/v} + \rho(v) e^{-(x+y)/v} \right] dy. \tag{1}$$

Дифференцированием уравнения (5.1) по x получим уравнение для J_x

$$J_x(t,\ x,\ z) = -\frac{\lambda}{4z} \left[e^{-(x-t)/z} + \rho(z) e^{-(x+t)/z} \right] +$$

$$+\frac{\lambda}{2}[E_1(x-t)+f(x+t)]\,J(x,\ x,z)+$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int_0^x [E_1(\mid t-y\mid)+$$

$$+f(t+y)]\,J_x(y,\ x,\ z)\,dy. \qquad (2)$$

Сравнивая уравнения (3) и (5.1) и используя определения функций E_1 и f, получаем

$$J_x(t,\ x,\ z)=-\frac{1}{z}J(t,\ x,\ z)+$$

$$+2J(x,\ x,\ z)\int_0^1 J(t,x,z')\,dz'/z'. \qquad (3)$$

Уравнение (1) принимает вид

$$R_x(v,\ z,\ x)=J(x,\ x,\ z)\left[1+\rho(v)\,e^{-2x/v}\right]-$$

$$-\frac{1}{v}R(v,\ z,\ x)+\int_0^x\left[-\frac{1}{z}J(y,\ x,\ z)+\right.$$

$$\left.+J(x,\ x,\ z)\,\Phi(y,\ x)\right]\left[e^{-(x-y)/v}+\right.$$

$$\left.+\rho(v)\,e^{-(x+y)/v}\right]dy, \qquad (4)$$

где

$$\Phi(t,\ x)=2\int_0^1 J(t,\ x,\ z')\,dz'/z'. \qquad (5)$$

Уравнение (4) сводится к виду

$$R_x(v,\ z,\ x)=-\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{z}\right)R(v,\ z,\ x)+$$

$$+J(x,\ x,\ z)\left\{1+\rho(v)\,e^{-2x/v}+\right.$$

$$\left.+\int_0^x\Phi(y,x)\left[e^{-(x-y)/v}+\rho(v)\,e^{-(x+y)/v}\right]dy\right\}.$$

$$(6)$$

Используя уравнения (5) и (5.3), получаем

$$R_x(v, z, x) = -\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{z}\right) R(v, z, x) + J(x, x, z)\left[1 + \rho(v) e^{-2x/v} + 2\int_0^1 R(v, z', x)\, dz'/z'\right]. \quad (7)$$

Чтобы выразить $J(x, x, z)$ через R, вернемся к уравнению (5.1). Положим $t = x$, тогда

$$J(x, x, z) = \frac{\lambda}{4}\left[1 + \rho(z) e^{-2x/z}\right] + \frac{\lambda}{2}\int_0^x \left[E_1(x - y) + f(x + y)\right] J(y, x, z)\, dy. \quad (8)$$

В силу (5.3) это уравнение принимает вид

$$J(x, x, z) = \frac{\lambda}{4}\left[1 + \rho(z) e^{-2x/z}\right] + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 R(v', z, x)\, dv'/v' = \frac{\lambda}{4}\left[1 + \rho(z) e^{-2x/z} + 2\int_0^1 R(v', u, x)\, dv'/v'\right]. \quad (9)$$

Окончательное уравнение для R имеет вид

$$R_x(v, z, x) = -\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{z}\right) R(v, z, x) + \frac{\lambda}{4}\left[1 + \rho(z) e^{-2x/z} + 2\int_0^1 R(v', z, x)\, dv'/v'\right]\left[1 + \rho(v) e^{-2x/v} + 2\int_0^1 R(v, z', x)\, dz'/z'\right]. \quad (10)$$

Из (5.2) вытекает следующее начальное условие при $x = 0$:

$$R(v, z, 0) = 0, \quad 0 \leqslant v, z \leqslant 1. \tag{11}$$

По известной функции $J(x, x, z)$ легко строится уравнение для $T(v, z, x)$. Продифференцировав (5.5) по x, получим

$$T_x(v, z, x) = e^{-x/v} J(x, x, z) + \int_0^x e^{-y/v} J_x(y, x, z)\, dy. \tag{12}$$

В соответствии с (3) это уравнение принимает вид

$$T_x(v, z, x) = e^{-x/v} J(x, x, z) + \\ + \int_0^x e^{-y/v} \left[-\frac{1}{z} J(y, x, z) + J(x, x, z)\, \Phi(y, x) \right] dy, \tag{13}$$

или

$$T_x(v, z, x) = e^{-x/v} J(x, x, z) - \\ - \frac{1}{z} T(v, z, x) + J(x, x, z) \int_0^x e^{-y/v} \Phi(y, x)\, dy. \tag{14}$$

Используя данные выше определения функций Φ и R, легко видеть, что

$$T_x(v, z, x) = -\frac{1}{z} T(v, z, x) + \frac{\lambda}{4} \left[1 + \rho(z)\, e^{-2x/z} + \right. \\ \left. + 2 \int_0^1 R(v', z, x)\, dv'/v' \right] \left[e^{-x/v} + \right. \\ \left. + 2 \int_0^1 T(v, z', x)\, dz'/z' \right]. \tag{15}$$

Из уравнения (5.4) следует начальное условие при $x = 0$:

$$T(v, z, 0) = 0, \quad 0 \leqslant v, z \leqslant 1. \tag{16}$$

7. Некоторые численные результаты

Для проверки описанной выше процедуры был проведен ряд вычислений для различных значений x и λ. Особый интерес представляет консервативный случай, когда $\lambda = 1{,}0$ и $\rho(x) = 1{,}0$. Для этого случая можно записать закон сохранения вида

$$\pi z = \pi z e^{-2x/z} + 2\pi \int_0^1 R(v, z, x)\,dv \tag{1}$$

или

$$\frac{z}{2}\left[1 - e^{-2x/z}\right] = \int_0^1 R(v, z, x)\,dv, \tag{2}$$

указывающий, что поток, входящий под углом z, равен потоку, исходящему под тем же углом, поскольку в данном случае нет потерь на поглощение и нижняя граница является идеально отражающей зеркальной поверхностью. Точность, с которой выполняется соотношение (2), является хорошей оценкой точности производимых вычислений.

С помощью схемы интегрирования Адамса — Мултона с шагом 0,005 и квадратурной формулы Гаусса седьмого порядка были получены результаты, приведенные в таблице 1 для $x = 4{,}0$. Отметим, что для определения численных значений различных углов вычислялись величины $\arccos z_i$, где z_i есть i-й корень смещенного полинома Лежандра седьмой степени.

8. Аналитическая механика и уравнения Гамильтона

Богатым источником двухточечных граничных задач является теория динамических механических систем. При применении к таким системам законов сохранения сразу же возникают двухточечные граничные задачи такого типа, который мы рассматривали в гл. 3. В нескольких следующих параграфах мы продемонстрируем применение наших результатов к задачам механики и в качестве наглядного примера рассмотрим простой гармонический осциллятор.

Рассмотрим движение частицы по прямой и будем описывать этот процесс гамильтонианом $H = H(p, q)$. Уравнения движения имеют вид

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad q(0) = 0, \tag{1}$$

$$-\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q}, \quad p(T) = c, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2}$$

Мы хотим определить неизвестное смещение $q(T)$ в момент времени T. Введем функцию

$r(c, T)$ — смещение в момент T от нулевого начального положения под действием движущего момента, равного c в момент времени T.

Таблица 1

Численная проверка закона сохранения, $x = 4{,}0$

Угол падения	Правая часть уравнения (2) ($\times 10^{-1}$)	Левая часть уравнения (2) ($\times 10^{-1}$)
1	0,1272300	0,1272302
2	0,6461707	0,6461721
3	1,485383	1,485387
4	2,499992	2,500000
5	3,514560	3,514573
6	4,353365	4,353382
7	4,871423	4,871443

В гл. 3 мы показали, что для системы

$$\frac{\partial u}{\partial z} = F(u, v), \quad u(0) = 0, \tag{3}$$

$$-\frac{\partial v}{\partial z} = G(u, v), \quad v(x) = c, \quad 0 \leqslant z \leqslant x, \tag{4}$$

функция $r(c, x) = u(z)|_{z=x}$ удовлетворяет уравнению с частными производными

$$\frac{\partial r}{\partial x} = F(r, c) + G(r, c)\frac{\partial r}{\partial c} \tag{5}$$

с начальным условием

$$r(c, 0) = 0. \tag{6}$$

Применяя этот результат к системе (1), (2), получим, что $r(c, T)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial r}{\partial T} = \frac{\partial H(r, c)}{\partial p} + \frac{\partial H(r, c)}{\partial q} \frac{\partial r}{\partial c}, \tag{7}$$

или

$$\frac{\partial r}{\partial T} = \frac{\partial H(r, c)}{\partial c}. \tag{8}$$

Для иллюстрации рассмотрим простой пример гармонического осциллятора. В этом случае

$$H(p, q) = \frac{1}{2} [p^2/m + kq^2],$$

где

$$q(0) = 0, \ p(T) = c, \quad m \text{ и } k \text{ постоянные}. \tag{9}$$

Уравнение (8) в данном случае принимает вид

$$\frac{\partial r}{\partial T} = \frac{\partial H}{\partial c} = \frac{c}{m} + kr \frac{\partial r}{\partial c}. \tag{10}$$

Решение этого уравнения с начальным условием (6) имеет вид

$$r(c, T) = \frac{c}{\sqrt{km}} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{k}{m}} T \right). \tag{11}$$

Эта формула дает желаемую величину смещения в момент T и, кроме того, показывает, что функция r может стать бесконечно большой при некоторых конечных значениях T.

9. Невариационные принципы динамики

Обобщим результаты предыдущего параграфа, следуя тому пути, которым шел Якоби при обобщении теории Гамильтона. Важно иметь в виду, что наш подход здесь применяется к общему случаю, когда может и не существовать вариационного принципа, лежащего в основе уравнений (8.1) и (8.2).

Рассмотрим для простоты систему уравнений движения

$$\frac{dq}{dt} = F(q, p), \quad q(0) = w, \tag{1}$$

$$-\frac{dp}{dt} = G(q, p), \quad p(T) = c, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2}$$

Раньше мы показали, что функции

$$r(c, T, w) = q(T), \tag{3}$$

$$\tau(c, T, w) = p(0) \tag{4}$$

удовлетворяют уравнениям с частными производными первого порядка

$$r_T = F(r, c) + G(r, c)\, r_c, \tag{5}$$

$$\tau_T = G(r, c)\, \tau_c \tag{6}$$

с начальными условиями

$$r(c, 0, w) = w, \tag{7}$$

$$\tau(c, 0, w) = c. \tag{8}$$

Следуя идеям Якоби, используем функции r и τ для определения решений p и q. Пусть

$$r = r(c, T, \alpha) \tag{9}$$

является решением уравнения (5) для произвольных значений параметра α, и пусть $\tau(c, T, \alpha)$ является решением уравнения (6), куда α входит через r. Тогда можно утверждать следующее: уравнения

$$\tau(p, t, \alpha) = \beta, \tag{10}$$

$$r(p, t, \alpha) = u \tag{11}$$

образуют систему уравнений, неявно определяющую q и p как функции от t, α и β, при этом q и p удовлетворяют уравнениям (1) и (2).

Проверим справедливость этого утверждения. Продифференцировав (10) по t, получим

$$\tau_c(p, t, \alpha)\, \dot{p} + \tau_T(p, t, \alpha) = 0, \tag{12}$$

откуда в силу (6) вытекает равенство

$$\dot{p} = -G(q,\ p) \tag{13}$$

при условии, что $\tau_c \neq 0$. Уравнение (13) является одним из нужных соотношений. Продифференцировав (11) по t, получим

$$r_c(p,\ t,\ \alpha)\,\dot{p} + r_T(p,\ t,\ \alpha) = \dot{q} \tag{14}$$

или

$$-r_c(p,\ t,\ \alpha)\,G(q,\ p) + r_T(p,\ t,\ \alpha) = \dot{q}, \tag{15}$$

откуда с учетом уравнения (5) получаем

$$\dot{q} = F(q,\ p). \tag{16}$$

10. Еще раз о гармоническом осцилляторе

Покажем, как можно использовать полученные уравнения, на старом примере гармонического осциллятора. Рассмотрим уравнения движения

$$\dot{q} = \frac{p}{m}, \quad q(0) = w, \tag{1}$$

$$-\dot{p} = kq, \quad p(T) = c. \tag{2}$$

Соответствующие уравнения для r и τ имеют вид

$$r_T = \frac{c}{m} + krr_c, \tag{3}$$

$$\tau_T = krr_c. \tag{4}$$

Легко проверить, что однопараметрическое семейство решений дается формулами

$$r(c,\ T,\ \alpha) = \frac{c}{\sqrt{km}}\,\mathrm{tg}\left[\sqrt{\frac{k}{m}}\,T + \alpha\right], \tag{5}$$

$$\tau(c,\ T,\ \alpha) = c\sec\left[\sqrt{\frac{k}{m}}\,T + \alpha\right]. \tag{6}$$

Поэтому решение системы уравнений (1)—(2) имеет вид

$$\beta = \tau(p,\ t,\ \alpha) = p \sec\left[\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \alpha\right] \tag{7}$$

и

$$q = r(p,\ t, \alpha) = \frac{p}{\sqrt{km}} \operatorname{tg}\left[\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \alpha\right]. \tag{8}$$

Эти выражения можно привести к виду

$$p = \beta \cos\left[\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \alpha\right], \tag{9}$$

$$q = \frac{\beta}{\sqrt{km}} \sin\left[\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \alpha\right], \tag{10}$$

что и представляет собой решение уравнений движения для гармонического осциллятора.

11. Равновесие тонкого стержня

В качестве другого примера применения наших идей к задачам механики рассмотрим задачу о равновесии тонкого стержня. Помимо собственно физического интереса, этот пример проиллюстрирует подход к решению системы уравнений четвертого порядка.

Положение тонкого стержня описывается уравнением

$$\frac{d^4u}{dt^4}(t) + k(t)\, u(t) = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant L, \tag{1}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2}(0) = 0, \qquad \frac{d^3u}{dt^3}(0) = 0, \tag{2}$$

$$u(L) = \alpha, \quad \frac{du}{dt}(L) = \beta. \tag{3}$$

Мы стремимся сформулировать задачу Коши для функции u. Пусть линейный оператор A определяется формулой

$$A[u] = \frac{d^4u}{dt^4} + k(t)\, u. \tag{4}$$

Рассмотрим три линейные задачи для функций v, w, z на интервале $0 \leqslant t \leqslant L$:

$$A[v] = g, \qquad 0 \leqslant t \leqslant L, \tag{5}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2}(0) = 0, \qquad \frac{d^3v}{dt^3}(0) = 0, \tag{6}$$

$$v(L) = 0, \qquad \frac{dv}{dt}(L) = 0; \tag{7}$$

$$A[w] = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant L, \tag{8}$$

$$\frac{d^2w}{dt^2}(0) = 0, \qquad \frac{d^3w}{dt^3}(0) = (0), \tag{9}$$

$$w(L) = 1, \qquad \frac{dw}{dt}(L) = 0; \tag{10}$$

$$A[z] = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant L, \tag{11}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}(0) = 0, \qquad \frac{d^3z}{dt^3}(0) = 0, \tag{12}$$

$$z(L) = 0, \qquad \frac{dz}{dt}(L) = 1. \tag{13}$$

Решение задачи (1)—(3) можно представить в виде

$$u(t) = v(t) + \alpha w(t) + \beta z(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant L. \tag{14}$$

Будем рассматривать v, w и z как явные функции от L и t и введем новые функции m, n, p, q, r, s следующим образом:

$$m(L) = \frac{d^2v}{dt^2}(L, L), \tag{15}$$

$$n(L) = \frac{d^2w}{dt^2}(L, L), \tag{16}$$

$$p(L) = \frac{d^2z}{dt^2}(L, L), \tag{17}$$

$$q(L) = \frac{d^3v}{dt^3}(L, L), \tag{18}$$

$$r(L) = \frac{d^3w}{dt^3}(L,\ L), \tag{19}$$

$$s(L) = \frac{d^3z}{dt^3}(L,\ L). \tag{20}$$

Рассуждая, как ранее в гл. 3, легко видеть, что мы получили следующую задачу Коши:

$$m'(L) = q - mp, \qquad m(0) = 0, \tag{21}$$

$$n'(L) = r - np, \qquad n(0) = 0, \tag{22}$$

$$p'(L) = s - n - p^2, \qquad p(0) = 0, \tag{23}$$

$$q'(L) = g - ms, \qquad q(0) = 0, \tag{24}$$

$$r'(L) = -k - ns, \qquad r(0) = 0, \tag{25}$$

$$s'(L) = -r - ps, \qquad s(0) = 0. \tag{26}$$

Здесь штрих обозначает производную по L. Уравнения для v, w и z имеют вид

$$v'(t,\ L) = -mz, \qquad v(t,\ t) = 0, \tag{27}$$

$$w'(t,\ L) = -nz, \qquad w(t,\ t) = 1, \tag{28}$$

$$z'(t,\ L) = -w - pz,\ z(t, t) = 0, \quad L > t. \tag{29}$$

12. Численный пример

Для проверки вычислительной эффективности описанной процедуры был решен численный пример. Рассматривалась задача об отыскании равновесия однородного стержня единичной длины со свободным левым концом и закрепленным правым. Стержень нагружен равномерно распределенной нагрузкой единичной величины, $g = 1$, и поддерживается упругим основанием с коэффициентом жесткости $k = 1$. Контрольное решение этой задачи было получено методом сегментации. Результаты решения приведены в таблице 2.

13. Оптимальное оценивание и фильтрация

Важной задачей, возникающей во многих областях науки и техники, является выделение сигнала при наличии шумов. Из теории детектирования и оценивания хорошо

известно, что интегральные уравнения Фредгольма играют центральную роль при определении минимальной среднеквадратичной оценки сигнала при наличии белого гауссова шума. Учитывая наш успех в решении интегральных уравнений Фредгольма, можно надеяться, что те же основные идеи могут быть использованы и в задачах теории связи. Проанализируем это предположение более подробно.

Таблица 2

Вычисление прогиба

t	Известное решение ($\times 10^{-1}$)	Решение методом инвариантного погружения ($\times 10^{-1}$)
0,0	1,155238	1,155238
0,2	0,8485617	0,8485617
0,4	0,5502636	0,5502636
0,6	0,2821820	0,2821820
0,8	0,08126717	0,08126716
1,0	$-0,550387\times 10^{-15}$	0,0

Рассмотрим стохастический процесс

$$y(t) = z(t) + v(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \leqslant \infty, \tag{1}$$

где v — белый гауссов шум с единичной спектральной плотностью, такой, что

$$E[v(t)] = 0, \tag{2}$$

$$E[v(t)\,v(s)] = \delta(t-s), \quad 0 \leqslant t < s \leqslant T, \tag{3}$$

$$E[z(t)\,v(s)] = 0, \quad t < s, \tag{4}$$

где $E[\cdot]$ обозначает математическое ожидание. Предположим для простоты, что

$$E[z(t)] = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

и что v и z — скалярные величины. Предположим, кроме того, что ковариация K сигнала z определяется формулой

$$K(t,\ s) = E[z(t)\,z(s)], \quad 0 \leqslant t,\ s \leqslant T, \tag{6}$$

где K удовлетворяет следующим условиям:

$$K(t,\ s) \text{ непрерывна по } t \text{ и } s, \tag{7}$$

$$\int_0^T K(t,\ t)\,dt < \infty. \tag{8}$$

Введем величину $\widehat{z(t)}$ как среднеквадратичную оценку $z(t)$ по известным наблюдениям $\{y(s),\ 0 \leqslant s \leqslant t\}, 0 \leqslant t \leqslant T$. Из теории фильтрации известно, что $\widehat{z}$ можно записать в виде

$$\widehat{z}(t) = \int_0^t h(t,\ s)\,y(s)\,ds, \tag{9}$$

где весовая функция $h(t,\ s)$ удовлетворяет уравнению

$$h(t, s) = K(t, s) - \int_0^t K(\tau, s)\,h(t, \tau)\,d\tau,$$

$$0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T. \tag{10}$$

Для того чтобы можно было применить к этому уравнению полученные выше результаты, введем дополнительное предположение о K:

$$K(t, s) = K(\,|\,t - s\,|\,) = \int_0^1 e^{-|t-s|\alpha}\,w(\alpha)\,d\alpha. \tag{11}$$

Эта задача представляет большой интерес для теории фильтрации и соответствует обобщенной форме процесса Буттерворта.

14. Инвариантное погружение и фильтрация в реальном масштабе времени

Покажем теперь, каким образом для сформулированной выше задачи можно построить фильтр, работающий в реальном масштабе времени, используя результаты и методы из гл. 4.

Пусть функция J удовлетворяет интегральному уравнению

$$J(s, t, \alpha) = e^{-(t-s)\alpha} - \int_0^t K(|\tau - s|) J(\tau, t, \alpha)\, d\tau,$$

$$0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \qquad (1)$$

Функцию h можно выразить через J следующим образом:

$$h(t, s) = \int_0^1 J(s, t, \alpha')\, w(\alpha')\, d\alpha'. \qquad (2)$$

Рассуждая точно также, как и в гл. 4, получим для J следующую задачу Коши:

$$X_t(t, \alpha) = -Y(t, \alpha) \int_0^1 Y(t, \alpha')\, w(\alpha')\, d\alpha', \qquad (3)$$

$$Y_t(t, \alpha) = -\alpha Y(t, \alpha) - X(t, \alpha) \int_0^1 Y(t, \alpha')\, w(\alpha')\, d\alpha', \qquad (4)$$

$$J_t(s, t, \alpha) = -\alpha J(s, t, \alpha) - X(t, \alpha) \int_0^1 J(s, t, \alpha')\, w(\alpha')\, d\alpha',$$

$$0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \qquad (5)$$

Ее начальные условия выглядят так:

$$X(0, \alpha) = 1, \qquad (6)$$

$$Y(0, \alpha) = 1, \qquad (7)$$

$$J(s, s, \alpha) = X(s, \alpha). \qquad (8)$$

Теперь с помощью уравнения (2) можно вычислить h. Однако мы пойдем другим путем и построим уравнение для $\hat{z}$, включающее только X, Y, и другую вспомогательную функцию от t и α. Избавившись таким образом от J, можно добиться значительного сокращения объема вычислений.

Для этой цели запишем еще раз уравнение для $\hat{z}$:

$$\hat{z}(t) = \int_0^t h(t, s)\, y(s)\, ds, \quad t > 0. \tag{9}$$

Используя уравнение (2), получим

$$\hat{z}(t) = \int_0^t \int_0^1 J(s, t, \alpha')\, w(\alpha')\, d\alpha'\, y(s)\, ds. \tag{10}$$

Меняя порядок интегрирования в (10), приходим к уравнению

$$\hat{z}(t) = \int_0^1 \int_0^t J(s, t, \alpha')\, y(s)\, ds\, w(\alpha')\, d\alpha'. \tag{11}$$

Введем новую функцию $L(t, \alpha)$:

$$L(t, \alpha) = \int_0^t J(s, t, \alpha)\, y(s)\, ds, \quad t > 0, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{12}$$

Продифференцируем L по t. Тогда

$$L_t(t, \alpha) = J(t, t, \alpha)\, y(t) + \int_0^t J_t(s, t, \alpha)\, y(s)\, ds,$$

$$t > 0, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{13}$$

Учитывая уравнения (5), (8) и (12), перепишем уравнение (13) в виде

$$L_t(t, \alpha) = X(t, \alpha)\, y(t) - \alpha L(t, \alpha) - X(t, \alpha) \int_0^1 L(t, \alpha')\, w(\alpha')\, d\alpha' =$$

$$= -\alpha L(t, \alpha) + X(t, \alpha) \left\{ y(t) - \int_0^1 L(t, \alpha')\, w(\alpha')\, d\alpha' \right\},$$

$$0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{14}$$

Из уравнения (12) вытекает начальное условие

$$L(0, \alpha) = 0. \tag{15}$$

По известной функции L можно записать $\hat{z}$ в виде

$$\hat{z}(t) = \int_0^1 L(t, \alpha') \, w(\alpha') \, d\alpha'. \qquad (16)$$

Уравнения для X, Y и L совместно с уравнением (16) для $\hat{z}$ образуют задачу Коши, позволяющую получить среднеквадратичную оценку сигнала в присутствии описанного выше шума. Поскольку наблюдаемая функция y выступает в уравнении (14) как внешнее воздействие, данная процедура идеально приспособлена для работы в реальном масштабе времени. Легко получить аналогичные результаты для многомерного случая и для случая, когда ядро ковариации имеет вид, отличный от (13.11). Эти важные вопросы будут рассмотрены в следующей нашей книге.

15. Некоторые аспекты нелинейного сглаживания

Гораздо более интересный и, конечно же, более трудный класс задач фильтрации возникает, когда уравнения, описывающие динамику системы и/или наблюдения, зависят от состояния нелинейным образом. В зависимости от того, для какого момента времени — будущего, настоящего или прошедшего — мы хотим получить оценку сигнала, мы сталкиваемся с задачами предсказания, фильтрации или сглаживания соответственно.

Мы хотим получить решение задачи нелинейного сглаживания, минимизирующее среднеквадратичное отклонение. В задаче сглаживания основной интерес представляет оценка состояний и параметров системы для конечного ряда моментов времени, которые выделяются из интервала наблюдения.

Задачи такого рода часто возникают в астрономии, когда стремятся скорректировать оценки начальных условий по мере получения новых результатов наблюдений, и в задачах анализа траекторий частиц, когда есть необходимость улучшить оценки в «критические» моменты. Как правило, эти моменты соответствуют различным подключениям во время работы, моментам фотографирования и т. д.

Рассматриваемый процесс описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = g(t, x) + \text{динамическая ошибка}, \qquad (1)$$

в то время как наблюдения имеют вид

$$y(t) = h(t, x) + \text{ошибка наблюдения} \qquad (2)$$

при $0 \leqslant t \leqslant T$. Требуется оценить состояние процесса в фиксированный момент времени t_1, $0 \leqslant t_1 \leqslant T$, основываясь на известной величине y на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$. Обобщение задачи на тот случай, когда оценка находится для нескольких моментов $\{t_i\}$, не вызывает трудностей, и мы оставляем его читателю в качестве простого упражнения.

Динамическая ошибка и ошибка наблюдения, входящие в (1) и (2), отражают неточное знание правых частей и всевозможные стохастические возмущения.

Оптимальная оценка $x^*(t)$ минимизирует среднеквадратичное отклонение

$$I(z) = \int_0^T [k_1\{y(t) - h(t, z)\}^2 + k_2\{\dot{z} - g(t, z)\}^2]\, dt + k_3\{z(0) - m_0\}^2, \qquad (3)$$

где k_1 и k_2 — неотрицательные весовые функции, а k_3 — неотрицательная постоянная. Таким образом, оптимальная оценка в момент $t_1 \leqslant T$ дается величиной $x^*(t_1)$.

Совершенно ясно, что отыскание оптимальной оценки эквивалентно решению следующей задачи оптимального управления: найти оптимальное управление $u(t)$ и оптимальную траекторию $x(t), 0 \leqslant t \leqslant T$, минимизирующие функционал

$$I(u) = \int_0^T [k_1\{y(t) - h(t, x)\}^2 + k_2 u^2(t)]\, dt + k_3 [x(0) - m_0]^2 \qquad (4)$$

при ограничениях

$$\dot{x} = g(x, t) + u \qquad (5)$$

со свободными $x(0)$ и $x(T)$.

16. Последовательное сглаживание

Простейший способ построения задачи Коши для $x^*(t_1)$ состоит в использовании уравнения Эйлера для функционала (15.4) с ограничением (15.5). Это уравнение имеет вид

$$\dot{x} = g(t, x) - \frac{\lambda}{2k_2}, \quad \lambda(0) - 2k_3[x(0) - m_0] = 0, \tag{1}$$

$$\dot{\lambda} = 2k_1\{y - h(t, x)\} h_x(t, x) - g_x(t, x)\lambda, \quad \lambda(T) = 0. \tag{2}$$

Для последовательного сглаживания нам необходима система уравнений, определяющая $x(t_1)$ как функцию от T. Для получения этих соотношений рассмотрим задачу

$$\dot{x} = \alpha(t, x, \lambda), \quad \lambda(0) - 2k_3[x(0) - m_0] = 0, \tag{3}$$

$$\dot{\lambda} = \beta(t, x, \lambda), \quad \lambda(T) = c, \quad T \geqslant 0, \quad |c| < \infty. \tag{4}$$

Используя введенное выше обозначение для $x(t)$ в точке t_1, а именно $x(t_1, T, c)$, повторим рассуждения, проведенные в гл. 3, и получим следующую задачу Коши:

$$x_T(t_1, T, c) + \beta(T, r(c, T), c)\, x_c(t_1 T, c) = 0, \tag{5}$$

$$x(t_1, t_1, c) = r(t_1, c), \tag{6}$$

$$r_T(T, c) + \beta(T, r(T, c), c)\, r_c(T, c) = \alpha(T, r(T, c), c), \tag{7}$$

$$r(0, c) = \frac{c}{2k_3} + m_0. \tag{8}$$

Несмотря на кажущуюся сложность, систему уравнений (5)—(8) можно решить методами конечных разностей, теории возмущений или другими способами. Разумеется, нас интересует решение $x(t_1, T, 0)$.

17. Линейные системы

Случай, когда функции g и h линейны по x, представляет особый интерес. В этом случае приведенные выше уравнения с помощью разделения переменных сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Если

$$g(t, x) = g(t)x + f(t), \tag{1}$$

$$h(t, x) = h(t)\, x, \tag{2}$$

то

$$\alpha(t, x, \lambda) = g(t)\, x + f(t)\, \frac{\lambda}{2k_2}, \tag{3}$$

$$\lambda(t, x, \lambda) = 2k_1 [y(t) - h(t)\, x]\, h(t) - g(t)\, \lambda. \tag{4}$$

Записав

$$r(T, c) = p(T)\, c + q(T) \tag{5}$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях c в уравнении (16.7), получим уравнения

$$\dot{p}(T) = 2k_1 h^2(T)\, p^2(T) + 2g(T)\, p(T) - \frac{1}{2k_2}, \tag{6}$$

$$\dot{q}(T) = g(T)\, q(t) + f(T) - 2k_1 h(T)\, p(T)\, [y(T) - h(T)\, q(T)] \tag{7}$$

с начальными условиями

$$p(0) = \frac{1}{2k_3}, \tag{8}$$

$$q(0) = m_0. \tag{9}$$

Аналогично, записав

$$x(t_1, T, c) = S(t_1, T)\, c + u(t_1, T) \tag{10}$$

и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях c в уравнении (16.5), получим

$$S_T(t_1, T) = g(T)\, S(t_1, T) + 2k_1 h^2(T)\, p(T), \tag{11}$$

$$u_T(t_1, T) = -2k_1 h(T)\, S(t_1, T)\, [y(T) - h(T)\, q(T)], \tag{12}$$

$$S(t_1, t_1) = p(t_1), \tag{13}$$

$$u(t_1, t_1) = q(t_1). \tag{14}$$

Поскольку оптимальная оценка в момент t_1 есть $x(t_1, T, 0)$, то мы получаем, что $u(t_1, T)$ и является искомой оценкой. Таким образом, уравнения (6)—(14) являются уравнениями последовательного сглаживания для данной линейной системы.

18. Интегро-дифференциальные уравнения и нелокальное взаимодействие волн

При изучении электромагнитных полей в металлических слитках и полупроводниках конечной толщины для электрической составляющей напряженности поля можно написать некоторые интегро-дифференциальные уравнения. Эти уравнения имеют следующий вид:

$$\frac{d^2e}{dt^2}(t) + Ae(t) = \int_0^L k(\,|\,t - t'\,|\,)\, e(t')\, dt', \quad 0 \leqslant t \leqslant L, \quad (1)$$

где A — некоторая постоянная. При этом в точках $t = 0$ и $t = L$ задаются граничные условия.

В предыдущих параграфах мы видели, что различные двухточечные граничные задачи, интегральные уравнения и вариационные задачи могут быть сведены к задачам Коши. В двух последних параграфах мы покажем, что и другой широкий класс функциональных уравнений и интегро-дифференциальных уравнений, удовлетворяющих некоторым граничным условиям, также может быть сведен к задачам Коши. Уравнения такого типа возникают в современной физике, когда оказывается необходимым учитывать нелокальные взаимодействия.

Для иллюстрации нашего подхода рассмотрим задачу отыскания функции $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant c$, удовлетворяющей интегро-дифференциальному уравнению

$$\ddot{u}(t) + Au(t) = \int_0^c k(\,|\,t - y\,|\,)\, u(y)\, dy \quad (2)$$

с граничными условиями

$$\dot{u}(0) = 0, \quad u(c) = 1. \quad (3)$$

Как и ранее, будем предполагать, что ядро k имеет вид

$$k(r) = \int_a^b e^{-r/z'}\, w(z')\, dz', \quad r > 0. \quad (4)$$

19. Описание задачи Коши

Поскольку в данном случае построение задачи Коши требует довольно много времени и места, сформулируем сначала окончательный результат и затем перейдем к обсуждению деталей. Пусть функции u и v являются решением линейной двухточечной граничной задачи:

$$\dot{u}(t, x) = v(t, x), \tag{1}$$

$$\dot{v}(t, x) + Au(t, x) = \int_0^x k(\,|\,t - y\,|\,)\,u(y, x)\,dy,$$

$$0 \leqslant t \leqslant x \leqslant c, \tag{2}$$

$$v(0, x) = 0, \tag{3}$$

$$u(x, x) = 1. \tag{4}$$

Задача Коши, решением которой являются функции v и u, состоит из приведенных ниже уравнений относительно восьми функций e, r, α, R, u, v, J, M:

$$e_x(x, s) = 1 - \frac{1}{s}\,e(x, s) = R(x)\,e(x, s) + \int_a^b r(s, z', x)\,w(z')\,dz', \tag{5}$$

$$r_x(s, z, x) = -\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{z}\right) r(s, z, x) - \alpha(x, z)\,e(x, s), \tag{6}$$

$$\alpha_x(x, z) = 1 + \int_a^b r(z', z, x)\,w(z')\,dz' - \alpha(x, z)\left[\frac{1}{z} + R^2(x)\right], \tag{7}$$

$$R_x(x) = -A + \int_a^b [e(x, z') + \alpha(x, z')]\,w(z')\,dz' - R^2(x), \tag{8}$$

$$u_x(t, x) = -R(x)\,u(t, x) + \int_a^b J(t, w, z')\,w(z')\,dz', \tag{9}$$

$$v_x(t, x) = -R(x)v(t, x) + \int_a^b M(t, x, z')w(z')dz', \quad (10)$$

$$J_x(t, x, z) = -\frac{1}{z}J(t, x, z) - \alpha(x, z)u(t, x), \quad (11)$$

$$M_x(t, x, z) = -\frac{1}{z}M(t, x, z) - \alpha(x, z)v(t, x),$$

$$0 \leqslant t \leqslant x \leqslant c, \qquad a \leqslant s, z \leqslant b, \quad (12)$$

При этом начальные условия имеют вид

$$e(0, s) = 0, \quad (13)$$

$$r(s, z, 0) = 0, \quad (14)$$

$$\alpha(0, z) = 0, \quad (15)$$

$$R(0) = 0, \quad (16)$$

$$u(t, t) = 1, \quad (17)$$

$$v(t, t) = R(t), \quad (18)$$

$$J(t, t, z) = 0, \quad (19)$$

$$M(t, t, z) = \alpha(t, z). \quad (20)$$

Уравнения (5)—(20) можно использовать точно также, как и ранее, для определения интересующих нас функций u и v.

20. Вывод задачи Коши

Начнем вывод приведенных выше соотношений, продифференцировав уравнения (19.1)—(19.4) по x. В результате получим

$$\dot{u}_x(t, x) = v_x(t, x), \quad (1)$$

$$\dot{v}_x(t, x) + Au_x(t, x) = k(x-t)u(x, x) + \int_0^x k(|t-y|)u_x(y, x)dy,$$

$$0 \leqslant t \leqslant x, \quad (2)$$

$$v_x(0,\ x) = 0, \tag{3}$$

$$\dot{u}(x,\ x) + u_x(x,\ x) = 0. \tag{4}$$

Здесь точка обозначает производную по первому аргументу, а нижний индекс x — по второму.

Введем функции Φ и Ψ как решения неоднородных интегро-дифференциальных уравнений

$$\dot{\Phi}(t,\ x) = \Psi(t,\ x), \tag{5}$$

$$\dot{\Psi}(t,\ x) + A\Phi(t,\ x) = k(x - t) + \int_0^x k(\,|\,t - y\,|\,)\,\Phi(y,\ x)\,dy,$$

$$0 \leqslant t \leqslant x, \tag{6}$$

с однородными граничными условиями

$$\Psi(0,\ x) = 0, \tag{7}$$

$$\Phi(0,\ x) = 0. \tag{8}$$

Рассматривая уравнения (1)—(4) как неоднородную систему интегро-дифференциальных уравнений относительно u_x и v_x с неоднородными граничными условиями, с помощью принципа суперпозиции получим следующее решение:

$$u_x(t,\ x) = -\dot{u}(x,\ x)\,u(t,\ x) + u(x,\ x)\,\Phi(t,\ x), \tag{9}$$

$$v_x(t,\ x) = -\dot{u}(x,\ x)\,v(t,\ x) + u(x,\ x)\,\Psi(t,\ x), \quad x \geqslant t. \tag{10}$$

Из граничного условия (19.4) сразу следует, что $u(x, x) = 1$. Рассмотрим теперь функции Φ, Ψ и $-\dot{u}(x,\ x)$.

Введем новые функции J и M как решение системы

$$\dot{J}(t,\ x,\ z) = M(t,\ x,\ z), \tag{11}$$

$$\dot{M}(t,\ x, z) + AJ(t,\ x,\ z) = e^{-(x-t)/z} +$$

$$+\int_0^x k(\,|\,t-y\,|\,)\,J(y,\ x,\ z)\,dy,\quad 0\leqslant t\leqslant x,\ a\leqslant z\leqslant b, \tag{12}$$

$$M(0,\ x,\ z)=0, \tag{13}$$

$$J(x,\ x,\ z)=0. \tag{14}$$

Учитывая вид ядра k и уравнения (5)—(8), легко видеть, что

$$\Phi(t,\ x)=\int_a^b J(t,\ x,\ z')\,w(z')\,dz', \tag{15}$$

$$\Psi(t,\ x)=\int_a^b M(t,\ x,\ z')\,w(z')\,dz',\quad 0\leqslant t\leqslant z. \tag{16}$$

Перейдем теперь к определению J и M.

Продифференцировав (11)—(14) по x, получим

$$\dot{J}_x(t,\ x,\ z)=M_x(t,x,z), \tag{17}$$

$$\dot{M}_x(t,\ x,\ z)+AJ_x(t,\ x,\ z)=-\frac{1}{z}\,e^{-(x-t)/z}+$$

$$+k(x-t)\,J(x,\ x,\ z)+\int_0^x k(\,|\,t-y\,|\,)\,J_x(y,\ x,z)\,dy, \tag{18}$$

$$M_x(0,\ x,\ z)=0, \tag{19}$$

$$\dot{J}(x,\ x,\ z)+J_x(x,\ x,\ z)=0. \tag{20}$$

Поскольку

$$J(x,\ x,\ z)=0 \tag{21}$$

и

$$-\dot{J}(x,\ x,\ z)=-M(x,\ x,\ z), \tag{22}$$

то ясно, что

$$J_x(t,\ x,\ z)=-\frac{1}{z}\,J(t,\ x,\ z)-M(x,\ x,\ z)\,u(t,\ x), \tag{23}$$

$$M_x(t,\ x,\ z)=-\frac{1}{z}\,M(t,\ x,\ z)-M(x,\ x,\ z)\,v(t,\ x),$$

$$x>t,\quad a\leqslant z\leqslant b. \tag{24}$$

Определим функцию α как

$$\alpha(x, z) = M(x, x, z). \tag{25}$$

Из уравнений (12) и (24) следует, что

$$\alpha_x(x, z) = \dot{M}(x, x, z) + M_x(x, x, z) = \\ = 1 + \int_0^x k(x-y) J(y, x, z)\, dy - \\ - \alpha(x, z)\left[\frac{1}{z} + v(x, x)\right]. \tag{26}$$

Введем для удобства новые обозначения

$$r(s, z, x) = \int_0^x e^{-(x-y)/s} J(y, x, z)\, dy, \quad a \leqslant s,\ z \leqslant b,\ x \geqslant 0, \tag{27}$$

и

$$R(x) = v(x, x), \quad x \geqslant 0. \tag{28}$$

Вспоминая определение ядра k, запишем

$$\alpha_x(x, z) = 1 + \int_0^x \int_a^b e^{-(x-y)/z'} w(z')\, dz' J(y, x, z)\, dy - \\ - \alpha(x, z)\left[\frac{1}{z} + R(x)\right]. \tag{29}$$

Это уравнение можно переписать окончательно в виде

$$\alpha_x(x, z) = 1 + \int_a^b r(z', z, x) w(z')\, dz' - \alpha(x, z)\left[\frac{1}{z} + R(x)\right]. \tag{30}$$

Перейдем теперь к рассмотрению функции r. Продифференцировав уравнение (27) по x, получим

$$r_x(s, z, x) = J(x, x, z) - \frac{1}{s} r(s, z, x) +$$

$$+\int_0^x e^{-(x-y)/s}\left[-\frac{1}{z}J(y,\ x,\ z)-\alpha(x,\ z)u(y,\ x)\right]dy. \quad (31)$$

Упрощая, запишем это уравнение в виде

$$r_x(s,\ z,\ x)=-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{s}\right)r(s,\ z,\ x)-\alpha(x,\ z)e(x,s), \quad (32)$$

где

$$e(x,\ s)=\int_0^x e^{-(x-y)/s}u(y,\ x)\,dy, \quad x\geqslant 0, \quad a\leqslant s\leqslant b. \quad (33)$$

Рассмотрим теперь функцию e. Из уравнения (33) получаем

$$e_x(x,\ s)=u(x,\ x)-\frac{1}{s}e(x,\ s)+$$

$$+\int_0^x e^{-(x-y)/s}\left[-\dot{u}(x,\ x)u(y,\ x)+u(x,\ x)\Phi(y,\ x)\right]dy. \quad (34)$$

Из этого уравнения вытекает, что

$$e_x(x,\ s)=1-\frac{1}{s}e(x,\ s)-$$

$$-R(x)e(x,s)+\int_0^x e^{-(x-y)/s}\Phi(y,\ x)\,dy. \quad (35)$$

Заметим, что

$$\dot{u}(x,\ x)=v(x,\ x)=R(x). \quad (36)$$

Используя уравнение (15), преобразуем интеграл в (35) следующим образом:

$$\int_0^x e^{-(x-y)/s}\int_a^b J(y,\ x,\ z')\,w(z')\,dz'dy=$$

$$=\int_a^b w(z')\,dz'\int_0^x e^{-(x-y)/s}J(y,\ x,\ z')\,dy, \quad (37)$$

$$\int_0^x e^{-(x-y)/s}\Phi(y,x)\,dy=\int_a^b r(s,\ z',\ x)\,w(z')\,dz'. \quad (38)$$

В результате получим дифференциальное уравнение для e

$$e_x(x, s) = 1 - \frac{1}{s} e(x, s) - R(x) e(x, s) + \\ + \int_a^b r(s, z', x) w(z') dz', \quad a \leqslant s \leqslant b. \tag{39}$$

Перейдем, наконец, к рассмотрению функции R, определенной ранее формулой

$$R(x) = v(x, x). \tag{40}$$

Продифференцировав (40) по x, получим

$$R_x(x) = \dot{v}(x, x) + v_x(x, x) = \\ = -Au(x, x) + \int_0^x k(x-y) u(y, x) dy - \\ - \dot{u}(x, x) v(x, x) + \Psi(x, x) u(x, x) = \\ = -A + \int_0^x \int_a^b e^{-(x-y)/z'} w(z') dz' u(y, x) dy - \\ - R^2(x) + \int_a^b M(x, x, z') w(z') dz' = \\ = -A + \int_a^b e(x, z') w(z') dz' - R^2(x) + \\ + \int_a^b \alpha(x, z') w(z') dz'. \tag{41}$$

Итак, мы получили дифференциальные уравнения для функций R, e, α и r. Это уравнения (41), (39), (30) и (32). Из определений этих функций вытекает, что все начальные условия при $x = 0$ однородны для всех $a \leqslant z, s \leqslant b$.

Пусть t — фиксированное неотрицательное число из интервала $[0, x]$. Тогда уравнения (23), (24), (9) и (10) являются дифференциальными уравнениями для функций J, M , u и v. Это завершает вывод задачи Коши.

Замечания и литература

§ 2. Подробный анализ функции источника с физической точки зрения проводится в книгах

Соболев В. В., Рассеяние света в атмосферах планет, изд-во «Наука», М., 1972.

Чандрасекхар (Chandrasekhar S.), Radiative transfer, Dover Co., New York, 1960.

§ 3. Многочисленные численные результаты и графики функций источника приведены в статье

Беллман, Кагивада, Калаба (Bellman R., Kagiwada H., Kalaba R.), Numerical results for the auxiliary equations of radiative transfer, *J. Quant. Spec. Rad. Trans.*, **6** (1966), 219—310.

§ 4. Таблицы значений функций отражения и пропускания приведены в книге

Беллман, Калаба, Престрод (Bellman R., Kalaba R., Prestrud M.), Invariant imbedding and radiative transfer in slabs of finite thickness, American Elsevier Co., New York, 1963.

§§ 5—7. Здесь мы следуем работе

Касти, Калаба, Уено (Casti J., Kalaba R., Ueno S.), Reflection and transmission functions for finite isotropically scattering atmospheres with specular reflectors, *J. Quant. Spec. Rad. Trans.*, **9** (1969), 537—552.

§§ 8—10. Эти результаты впервые опубликованы в статьях

Беллман, Калаба (Bellman R., Kalaba R.), A note on Hamilton's equations and invariant imbedding, *Quart. Appl. Math.*, **21** (1963), 166—168.

Беллман, Кагивада, Калаба (Bellman R., Kagiwada H., Kalaba R.), Invariant imbedding and nonvariational principles in analytical dynamics, *Int. J. Nonlinear Mechanics*, **1** (1966), 51—55.

§§ 11—12. Дальнейшие теоретические и обширные численные результаты приведены в работах

Олспо, Кагивада, Калаба (Alspaugh D., Kagiwada H., Kalaba R.), Dynamic programming, invariant imbedding, and thin beam theory, The RAND Corp., RM—5706—PR, Aug. 1968.

Олспо, Кагивада, Калаба, Application of invariant imbedding to the eigenvalue problems for buckling of columns, The RAND Corp., RM—5954—PR, Aug. 1969.

§§ 13—17. Более подробно задача фильтрации обсуждается в работе

Касти, Калаба, Мурти (Casti J., Kalaba R., Murthy V.), A new initial value method for on-line filtering and estimation, *IEEE Trans. Info. Theory*, July (1972), 515—517.

Результаты для нелинейного случая приведены в

Кагивада, Калаба, Шумицки, Сридхар (Kagiwada H., Kalaba R., Schumitzky A., Sridhar R.), Invariant imbedding and sequential interpolating filters for nonlinear processes, The RAND Corp., RM—5507—PR, Nov. 1967.

Тем же вопросам посвящена статья

Беллман, Кагивада, Калаба, Сридхар (Bellman R., Kagiwada H., Kalaba R., Sridhar R.), Invariant imbedding and nonlinear filtering theory, *J. Astro. Sci.*, **13** (1966), 110—115.

Интересно сравнить эти результаты для частного случая линейных систем с классической работой в этой области

Калман, Бьюси (Kalman R., Bucy R.), New results in linear filtering and prediction theory, *J. Basic Engr., ASME, Series* D, **83** (1961), 95—108. [Русский перевод: Калман Р., Бьюси Р., Труды Американского общества инженеров-механиков, 83Д, № 1, 1961.]

§ 18. Приложения этих интегро-дифференциальных уравнений к изучению твердых пластмасс, электронных

взаимодействий, аномального скин-эффекта и распространения геликонных волн вблизи циклотронного резонанса можно найти в основополагающих статьях:

Барафф (Baraff G.) *J. Math. Phys.*, **9** (1968), 372.

Phys. Rev., **167** (1968), 625.

Phys. Rev., **178** (1969), 1155.

Джурас (Juras G.), Line shapes in the radio frequency size effect of metals, *Phys. Rev.*, **187** (1969), 784.

§§ 19—20. Изложенные результаты впервые опубликованы в

Калаба (Kalaba R.), Boundary value problems for the integro-differential equation of nonlocal wave interaction—I, *J. Math. Phys.*, **11** (1970), 1999—2004.

Приложение А

ПРОГРАММА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЯДРАМИ ВИДА $k(t, y) = k(|t - y|)$

1. Описание

В программе предполагается, что ядро $k(t, y)$ имеет вид, как в уравнении (2.2) из гл. 4, и $z = [0, 1]$. Пользователь должен написать подпрограмму KERNEL, вычисляющую функцию $w(z_i)WT_i$, где z_i — абсциссы квадратурной формулы Гаусса из интервала [0,1], $i = 1, 2, \ldots$, NQUAD (порядок квадратурной формулы определяется пользователем), а WT_i — соответствующие весовые коэффициенты. Значения $w(z_i)WT_i$ хранятся в массиве AKERN(I). Кроме того, пользователь должен написать подпрограмму ESUM1, которая вычисляет значения функции $g(t)$. Параметром процедуры ESUM1 является текущее значение независимой переменной x. Результат вычислений хранится в ячейке E1SUM.

Обращение к программе имеет вид: CALL INTEQ (NQUAD, NIPTS, PTS, ALEN(K), TDEL, OUTPT, T, K, INDM1), при этом пользователь задает численные значения следующих параметров:

NQUAD — порядок квадратурной формулы, целое число от 3 до 15;

NIPTS — целое число от 1 до 76, указывающее число точек из интервала интегрирования, в которых требуется определить решение;

PTS — одномерный массив из 76 ячеек, в которых в порядке возрастания хранятся указанные точки;

ALEN(K) — действительная переменная, указывающая длину интервала интегрирования;

TDEL — действительная переменная, указывающая длину шага интегрирования (шаг интегрирования должен быть *больше* 0,001);

OUTPT — одномерный массив из 76 ячеек, в которых хранятся значения решения в заданных точках (элементы массива OUTPT находятся в однозначном соответствии с элементами PTS);

T — одномерный массив дополнительной памяти из 12610 ячеек;

NTL — число интервалов интегрирования.

Пользователь должен помнить, что элементы массива PTS являются произведениями шага TDEL на целые числа.

По окончании вычислений с заданным шагом TDEL длина шага автоматически уменьшается вдвое и задача решается еще раз для проверки точности решения, если переменной NCHECK присвоено некоторое целочисленное значение, отличное от нуля. В этом случае пользователь может получить результат из контрольного счета, заменив в основной программе вектор OUTPT на вектор TEST.

Если пользователь хочет получить значения вспомогательных переменных X_i, Y_i, e_i, J_i или u_i, он может обратиться к массиву T, где эти переменные расположены в следующем порядке:

$$X_i \text{ — } T(1) \div T(NQUAD),$$

$$Y_i \text{ — } T(NQUAD + 1) \div (2*NQUAD),$$

$$e_i \text{ — } T(2*NQUAD + 1) \div T(3*NQUAD),$$

$$J_{1,i} \text{ — } T(3*NQUAD + 1) \div T(4*NQUAD),$$

$$u_1 \text{ — } T(4*NQUAD + 1),$$

$$J_{2,i} \text{ — } T(4*RQUAD + 2) \div T(5*NQUAD + 1),$$

$$u_2 \text{ — } T(5*NQUAD + 2),$$

. . . .

$$i = 1, 2, \ldots, NQUAD.$$

Если требуется получить решение более, чем в 76 точках, то необходимо ввести в программу следующие изменения:

1. Увеличить длину массивов UPRI, PTS и OUTPT до желаемой длины.

2. Увеличить длину массива T от 12610 до 450 + + 160 NIPTS.

3. Увеличить длину массива AJPRI от (76, 15) до (NIPTS, 15).

4. В подпрограммах INT1 и INT2 изменить длину массива DUMMY от 1310 до 95 + 160 NIPTS.

2. Расположение и формат числового материала

Формат и расположение числового материала имеют следующий вид

		Формат
Карта 1 NQUAD, NIPTS		2 I 5
Карта 2 NIL		I 5
Карты 3 ÷ (NIPTS + 1)	PTS	F 10.3
Карта (NIPTS + 2)	TDEL	F 10.3
Карты (NIPTS + 3) ÷ (NIPTS + 3 + + NIL)	ALEN	F 10.3
Карта (NIPTS + NIL + 4)	NCHECK	I 5

В этой программе используется процедура «предсказание-уточнение» Адамса — Мултона четвертого порядка. При этом для получения начальной точки используется метод Рунге — Кутта четвертого порядка.

```
//C2600#04 JOB (6547,120,152),'IMBEDDING',CLASS=B
//STEP1 EXEC FORTCLG,REGION.GO=200K
//FORT.SYSIN DD #
      IMPLICIT REAL#8(A-H,O-Z)
      DIMENSION PTS(76),OUTPT(76),TEST(76),T(12610),ALEN(10)
      DO 1 I=1,30
      OUTPT(I)=0.
    1 TEST(I)=0.
      READ(5,100)NQUAD,NIPTS
      READ(5,100)NIL
      READ(5,101)(PTS(I),I=1,NIPTS)
      READ(5,101)TDEL
      READ(5,101)(ALEN(I),I=1,NIL)
      READ(5,100)NCHECK
      DO 20 K=1,NIL
      WRITE(6,102)ALEN(K)
    8 CALL INTEQ(NQUAD,NIPTS,PTS,ALEN(K),TDEL,OUTPT,T,K,
       INDM1)
      IF(NCHECK.EQ.O)GO TO 9
      DO 5 I=1,30
      IF(DABS(TEST(I)-OUTPT(I)).LE.1.D-4)GO TO 5
      GO TO 6
    5 CONTINUE
      GO TO 9
    6 DO 7 I=1,30
    7 TEST(I)=OUTPT(I)
      TDEL=TDEL/2.
      GO TO 8
    9 DO 10 I=1,INDM1
   10 WRITE(6,103)PTS(I),OUTPT(I)
      WRITE(6,104)TDEL
   20 CONTINUE
      CALL EXIT
  100 FORMAT(2I5)
  101 FORMAT(F10.3)
  102 FORMAT(1H1,28HSOLUTION FOR INTERVAL LENGTH,D10.3/1H,
       5X,1HT,10X,4H,
     1U(T))
  103 FORMAT(1H,F6.3,D14.7)
  104 FORMAT(1H0,17HFINAL STEP SIZE=.D13.6)
      END
      SUBROUTINE INTEQ(NQ,NIPTS,PTS,ALENG,H,OUTPT,T,KK,INDM1)
C
C
C       – ОБОЗНАЧЕНИЯ –
C
C       R- МАССИВ КОРНЕЙ
C       W- МАССИВ ВЕСОВ
```

```
C NQUAD- ЧИСЛО АБСЦИСС КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ
C AKERN- МАССИВ ФУНКЦИЙ  W(Z)
C  XSUM-
C  YSUM- МАССИВЫ СУММ, СВЯЗАННЫХ С ФУНКЦИЯМИ X,Y. И E
C E1SUM-
C E2SUM-
C
C  XPRI-
C  YPRI- МАССИВЫ,СВЯЗАННЫЕ С ПРОИЗВОДНЫМИ ФУНКЦИЙ  X,Y,E,J И U
C  EPRI-
C AJPRI-
C  UPRI-
C
C    PTS- МАССИВ ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК, В КОТОРЫХ ВЫЧИСЛЯЕТСЯ РЕШЕНИЕ
C
C  ALEN- МАССИВ ДЛИН ИНТЕРВАЛОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ
C
C    NIL- ПЕРЕМЕННАЯ,УКАЗЫВАЮЩАЯ НОМЕР ИНТЕРВАЛА
C         ИНТЕГРИРОВАНИЯ ИЗ МАССИВА ALEN
C NIPTS- ПЕРЕМЕННАЯ, УКАЗЫВАЮЩАЯ ЧИСЛО ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК
C         ИЗ ИНТЕРВАЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ
C
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON                    R(15),W(15),AKERN(15),XSUM,YSUM,
       E1SUM,E2SUM
     1,XPRI(15),YPRI(15),EPRI(15),AJPRI(76,15),UPRI(76)
      COMMON AUX(4),NAUX(11),NQUAD
      DIMENSION PTS(76),OUTPT(76),T(12610)
      IF(KK.NE.1)GO TO 35
      NQUAD=NQ
      CALL RTSWTS
      CALL KERNEL
      DO 5 I=1,5250
    5 T(I)=0.
C
C
      X=0.
C
C
C     N= ЧИСЛО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
C
      N=3*NQUAD
      N1=2*NQUAD
      DO 10 I=1,N1
   10 T(I)=1.
      IND=1
      CALL INT1(T,N,X,H)
```

```
C
C    ЕСЛИ ПРОЦЕСС ДОШЕЛ ДО ОДНОЙ ИЗ ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК
C    ИНТЕРВАЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ, ДОБАВИТЬ НОВЫЕ УРАВНЕНИЯ
C
   11 IF(DABS(X-PTS(IND)).LE.L.D-3)GO TO 14
   35 IF(DABS(X-ALENG).LE.1.D-3)GO TO 37
   13 CALL INT2(T,N,X,H)
      GO TO 11
   14 N=N+NQUAD+1
      NEND=NQUAD
      DO 20 I=1,NEND
      K=N+I-NQUAD-1
   20 T(K)=T(I)
      CALL ESUM1(X)
      CALL ESUM2(T,N,X,H)
      T(K+1)=E1SUM+E2SUM
      CALL INT1(T,N,X,H)
      IND=IND+1
      GO TO 35
   37 INDM1=IND-1
      DO 40 I=1,INDM1
      IZ=(I+3)*(NQUAD+1)-3
   40 OUTPT(I)=T(IZ)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE DAUX(T,N,X,H)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON                   R(15),W(15),AKERN(15),XSUM,YSUM,
      E1SUM,E2SUM
     1,XPRI(15),YPRI(15),EPRI(15),AJPRI(76,15),UPRI(76)
      COMMON AUX(4),NAUX(11),NQUAD
      DIMENSION T(12610)
      CALL XSUMS(T,N)
      CALL YSUMS
      CALL ESUM1(X)
      CALL ESUM2(T,N,X,H)
      CALL PRIMES(T,N,X,H)
      IF(N.EQ.(3*NQUAD))GO TO 5
      GO TO 15
    5 DO 10 I=1,NQUAD
      K=I+3*(NQUAD+1)-3
      T(K)=XPRI(I)
      KK=K+NQUAD
      T(KK)=YPRI(I)
      KKK=KK+NQUAD
   10 T(KKK)=EPRI(I)
      RETURN
   15 NJ=(N-3*NQUAD/(NQUAD+1)
      NSTRT= NQUAD*(3+NJ)+NJ
```

```
      NEND=3*NQUAD+N+3
      DO 20 I=1,NQUAD
      IX=NSTRT+I
      T(IX)=XPRI(I)
      IY=IX+NQUAD
      T(IY)=YPRI(I)
      EI=IY+NQUAD
   20 T(IE)=EPRI(I)
      JNO=1
   25 DO 30 I=1,NQUAD
      IJ=(JNO-1)+(NQUAD+1)+NEND+I-3
   30 T(IJ)=AJPRI(JNO,1)
      T(IJ+1)=UPRI(JNO)
      JNO=JNO+1
      IF(JNO.GT.NJ)RETURN
      GO TO 25
      END
      SUBROUTINE PRIMES(T,N,X,H)
      IMPLICIT REAL*B(A-H,O-Z)
      COMMON                    R(15),W(15),AKERN(15),XSUM,YSUM,
     1 E1SUM,E2SUM
     1,XPRI(15),YPRI(15),EPRI(15),AJPRI(76,15),UPRI(76)
      COMMON AUX(4),NAUX(11),NQUAD
      DIMENSION T(12610)
      REAL*8 JSUM
      DO 10 I=1,NQUAD
      IY=NQUAD+1
      XPRI(I)=T(IY)*XSUM
      IX=I
      YPRI(I)=-T(IY)/R(I)+T(IX)*YSUM
      IE=2*NQUAD
   10 EPRI(I)=-T(IE)/R(I)+T(IX)*(E1SUM+E2SUM)
      IF(N.EQ.(3*NQUAD))RETURN
      NJ=(N-3*NQUAD)/(NQUAD+1)
      JSUM=0.
      JNO=1.
   15 DO 20 I=1,NQUAD
      IJ=(JNO-1)*(NQUAD+1)+3*NQUAD   +I
   20 JSUM=JSUM+T(IJ)*AKERN(I)
      DO 25 I=1,NQUAD
      IX=I
      IJ=(JNO-1)*(NQUAD+1)+3*NQUAD   +I
   25 AJPRI(JNO,I)=-T(IJ)/R(I)+T(IX)*JSUM
      UPRI(JNO)=JSUM*(E1SUM+E2SUM)
      JSUM=0.
      JNO=JNO+1
      IF(JNO.GT.NJ)RETURN
```

```
      GO TO 15
      END
      SUBROUTINE ESUM2(T,N,X,H)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON                     R(15),W(15),AKERN(15),XSUM,YSUM,
     1 E1SUM,E2SUM
     1,XPRI(15),YPRI(15),EPRI(15),AJPRI(76,15),UPRI(76)
      COMMON AUX(4),NAUX(11),NQUAD
      DIMENSION T(12610)
      E2SUM=0.
      DO 10 I=1,NQUAD
      IEE=2*NQUAD  +I
   10 E2SUM=E2SUM+T(IEE)*AKERN(I)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE XSUMS(T,N)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON                     R(15),W(15),AKERN(15),XSUM,YSUM,
     1 E1SUM,E2SUM
     1,XPRI(15),YPRI(15),EP I(15),AJPRI(76,15),UPRI(76)
      COMMON AUX(4),NAUX(11),NQUAD
      DIMENSION T(12610)
      XSUM=0.
      DO 10 I=1,NQUAD
      II=I+NQUAD
   10 XSUM=XSUM+T(II)*AKERN(I)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE YSUMS
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON                     R(15),W(15),AKERN(15),XSUM,YSUM,
     1 E1SUM,E2SUM
     1,XPRI(15),YPRI(15),EQRI(15),AJPRI(76,15),UPRI(76)
      COMMON AUX(4),NAUX(11),NQUAD
      YSUM=XSUM
      RETURN
      END
      SUBROUTINE KERNEL
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON                     R(15),W(15),AKERN(15),XSUM,YSUM,
     1 E1SUM,E2SUM
     1,XPRI(15),YPRI(15),EPRI(15),AJPRI(76,15),UPRI(76)
      COMMON AUX(4),NAUX(11),NQUAD
      DO 10 I=1,NQUAD
   10 AKERN(I)=R(I)*W(I)
      RETURN
      END
```

```
 SUBROUTINE ESUM1(X)
 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
 COMMON                    R(15),W(15),AKERN(15),XSUM,YSUM,
1 E1SUM,E2SUM
1,XPRI(15),YPRI(15),EPRI(15),AJPRI(76,15),UPRI(76)
 COMMON AUX(4),NAUX(11),NQUAD
 E1SUM=DEXP(-(1.5-X))
 RETURN
 END
 SUBROUTINE RTSWTS
 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
 COMMON                    R(15),W(15),AKERN(15),XSUM,YSUM,
1 E1SUM,E2SUM
1,XPRI(15),YPRI(15),EPRI(15),AJPRI(76,15),UPRI(76)
 COMMON AUX(4),NAUX(11),NQUAD
 DIMENSION RTS(13,15),WTS(13,15)
 IF(NQUAD.EQ.1)GO TO 20
 RTS(1,1)=.11270166
 RTS(1,2)=.5
 RTS(1,3)=.88729833
 WTS(1,1)=.27777777
 WTS(1,2)=.44444444
 WTS(1,3)=WTS(1,1)
 RTS(2,1)=.069431844
 RTS(2,2)=.33000948
 RTS(2,3)=.66999052
 RTS(2,4)=.93056815
 WTS(2,1)=.17392742
 WTS(2,2)=.32607258
 WTS(2,3)=WTS(2,2)
 WTS(2,4)-WTS(2,1)
 RTS(3,1)=4.6910077E-2
 RTS(3,2)=2.3076534E-1
 RTS(3,3)=.5
 RTS(3,4)=7.6923466E-1
 RTS(3,5)=9.5308992E-1
 WTS(3,1)=1.1846344E-1
 WTS(3,2)=2.3931433E-1
 WTS(3,3)=2.8444444E-1
 WTS(3,4)=WTS(3,2)
 WTS(3,5)=WTS(3,1)
 RTS(4,1)=3.3765242E-2
 RTS(4,2)=1.6939531E-1
 RTS(4,3)=3.8069041E-1
 RTS(4,4)=6.1930959E-1
 RTS(4,5)=8.3060469E-1
 RTS(4,6)=9.6623475E-1
```

```
WTS(4,1)=8.5662246E-2
WTS(4,2)=1.8038078E-1
WTS(4,3)=2.3395696E-1
WTS(4,4)=WTS(4,3)
WTS(4,5)=WTS(4,2)
WTS(4,6)=WTS(4,1)
RTS(5,1)=2.5446044E-2
RTS(5,2)=1.2923441E-1
RTS(5,3)=2.9707742E-1
RTS(5,4)=.5
RTS(5,5)=7.0292257E-1
RTS(5,6)=8.7076559E-1
RTS(5,7)=9.7455396E-1
WTS(5,1)=6.4742483E-2
WTS(5,2)=1.3985269E-1
WTS(5,3)=1.9091503E-1
WTS(5,4)=2.0897959E-1
WTS(5,5)=WTS(5,3)
WTS(5,6)=WTS(5,2)
WTS(5,7)=WTS(5,1)
RTS(6,1)=1.9855071E-2
RTS(6,2)=1.0166676E-1
RTS(6,3)=2.3723379E-1
RTS(6,4)=4.0828268E-1
RTS(6,5)=5.9171732E-1
RTS(6,6)=7.6276620E-1
RTS(6,7)=8.9833323E-1
RTS(6,8)=9.8014493E-1
WTS(6,1)=5.0614268E-1
WTS(6,2)=1.1119051E-1
WTS(6,3)=1.5685332E-1
WTS(6,4)=1.8134189E-1
WTS(6,5)=WTS(6,4)
WTS(6,6)=WTS(6,3)
WTS(6,7)=WTS(6,2)
WTS(6,8)=WTS(6,1)
RTS(7,1)=1.5919880E-2
RTS(7,2)=8.1984446E-2
RTS(7,3)=1.9331428E-1
RTS(7,4)=3.3787328E-1
RTS(7,5)=.5
RTS(7,6)=6.6212671E-1
RTS(7,7)=8.0668571E-1
RTS(7,8)=9.1801555E-1
RTS(7,9)=9.8408011E-1
WTS(7,1)=4.0637194E-2
WTS(7,2)=9.0324080E-2
```

```
WTS(7,3)=1.3030534E-1
WTS(7,4)=1.5617354E-1
WTS(7,5)=1.6511967E-1
WTS(7,6)=WTS(7,4)
WTS(7,7)=WTS(7,3)
WTS(7,8)=WTS(7,2)
WTS(7,9)=WTS(7,1)
RTS(8,1)=1.3046736E-2
RTS(8,2)=6.7468316E-2
RTS(8,3)=1.6029522E-1
RTS(8,4)=2.8330230E-1
RTS(8,5)=4.2556283E-1
RTS(8,6)=5.7443716E-1
RTS(8,7)=7.1669769E-1
RTS(8,8)=8.3970478E-1
RTS(8,9)=9.3253168E-1
RTS(8,10)=9.8695326E-1
WTS(8,1)=3.3335672E-2
WTS(8,2)=7.4725674E-2
WTS(8,3)=1.0954318E-1
WTS(8,4)=1.3463336E-1
WTS(8,5)=1.4776211E-1
WTS(8,6)=WTS(8,5)
WTS(8,7)=WTS(8,4)
WTS(8,8)=WTS(8,3)
WTS(8,9)=WTS(8,2)
WTS(8,10)=WTS(8,1)
RTS(9,1)=1.0885671E-2
RTS(9,2)=5.6468700E-2
RTS(9,3)=1.3492399E-1
RTS(9,4)=2.4045194E-1
RTS(9,5)=3.6522842E-1
RTS(9,6)=.5
RTS(9,7)=6.3477157E-1
RTS(9,8)=7.5954806E-1
RTS(9,9)=8.6507600E-1
RTS(9,10)=9.435312E-1
RTS(9,11)=9.891143E-1
WTS(9,1)=2.7834283E-2
WTS(9,2)=6.2790185E-2
WTS(9,3)=9.3145105E-2
WTS(9,4)=1.1659688E-1
WTS(9,5)=1.3140227E-1
WTS(9,6)=1.3 46254E-1
WTS(9,7)=WTS(9,5)
WTS(9,8)=WTS(9,4)
WTS(9,9)=WTS(9,3)
```

```
WTS(9,10)=WTS(9,2)
WTS(9,11)=WTS(9,1)
RTS(10,1)=9.2196828E-3
RTS(10,2)=4.7941371E-3
RTS(10,3)=1.1504866E-1
RTS(10,4)=2.0634102E-1
RTS(10,5)=3.1608425E-1
RTS(10,6)=4.3738329E-1
RTS(10,7)=5.6261670E-1
RTS(10,8)=6.8391574E-1
RTS(10,9)=7.9365897E-1
RTS(10,10)=8.849513E-1
RTS(10,11)=9.5205862E-1
RTS(10,12)=9.9078031E-1
WTS(10,1)=2.35876682E-2
WTS(10,2)=5.34696629E-2
WTS(10,3)=8.00391643E-2
WTS(10,4)=1.01583713E-1
WTS(10,5)=1.16746268E-1
WTS(10,6)=1.24573523E-1
WTS(10,7)=WTS(10,6)
WTS(10,8)=WTS(10,5)
WTS(10,9)=WTS(10,4)
WTS(10,10)=WTS(10,3)
WTS(10,11)=WTS(10,2)
WTS(10,12)=WTS(10,1)
RTS(11,1)=7.9084726E-3
RTS(11,2)=4.1200800E-2
RTS(11,3)=9.9210954E-2
RTS(11,4)=1.7882533E-1
RTS(11,5)=2.7575362E-1
RTS(11,6)=3.8477084E-1
RTS(11,7)=.5
RTS(11,8)=6.1522915E-1
RTS(11,9)=7.2424637E-1
RTS(11,10)=8.211746E-1
RTS(11,11)=9.007890E-1
RTS(11,12)=9.587992E-1
RTS(11,13)=9.920915E-1
WTS(11,1)=2.0242002E-2
WTS(11,2)=4.6060749E-2
WTS(11,3)=6.9436755E-2
WTS(11,4)=8.9072990E-2
WTS(11,5)=1.0390802E-1
WTS(11,6)=1.1314159E-1
WTS(11,7)=1.1627577E-1
WTS(11,8)=WTS(11,6)
```

```
WTS(11,9)=WTS(11,5)
WTS(11,10)=WTS(11,4)
WTS(11,11)=WTS(11,3)
WTS(11,12)=WTS(11,2)
WTS(11,13)=WTS(11,1)
RTS(12,1)=6.8580956E-3
RTS(12,2)=3.5782558E-2
RTS(12,3)=8.6399342E-2
RTS(12,4)=1.5635355E-1
RTS(12,5)=2.4237568E-1
RTS(12,6)=3.4044382E-1
RTS(12,7)=4.4597253E-1
RTS(12,8)=5.5402747E-1
RTS(12,9)=6.5955618E-1
RTS(12,10)=7.576243E-1
RTS(12,11)=8.436464E-1
RTS(12,12)=9.136006E-1
RTS(12,13)=9.6421744E-1
RTS(12,14)=9.9314190E-1
WTS(12,1)=1.7559730E-2
WTS(12,2)=4.0079043E-2
WTS(12,3)=6.0759285E-2
WTS(12,4)=7.8601583E-2
WTS(12,5)=9.2769199E-2
WTS(12,6)=1.0259923E-1
WTS(12,7)=1.0763192E-1
WTS(12,8)=WTS(12,7)
WTS(12,9)=WTS(12,6)
WTS(12,10)=WTS(12,5)
WTS(12,11)=WTS(12,4)
WTS(12,12)=WTS(12,3)
WTS(12,13)=WTS(12,2)
WTS(12,14)=WTS(12,1)
RTS(13,1)=6.0037409E-3
RTS(13,2)=3.1363303E-2
RTS(13,3)=7.5896708E-2
RTS(13,4)=1.3779113E-1
RTS(13,5)=2.1451391E-1
RTS(13,6)=3.0292432E-1
RTS(13,7)=3.9940295E-1
RTS(13,8)=.5
RTS(13,9)=6.0059704E-1
RTS(13,10)=6.9707567E-1
RTS(13,11)=7.8548608E-1
RTS(13,12)=8.6220886E-1
RTS(13,13)=9.2410329E-1
RTS(13,14)=9.6863669E-1
```

```
      RTS(13,15)=9.9399625E-1
      RTS(13,1)=1.5376621E-2
      WTS(13,2)=3.5183023E-2
      WTS(13,3)=5.3579610E-2
      WTS(13,4)=6.9785338E-2
      WTS(13,5)=8.3134602E-2
      WTS(13,6)=9.3080500E-2
      WTS(13,7)=9.9215742E-2
      WTS(13,8)=1.0128912E-1
      WTS(13,9)=WTS(13,7)
      WTS(13,10)=WTS(13,6)
      WTS(13,11)=WTS(13,5)
      WTS(13,12)=WTS(13,4)
      WTS(13,13)=WTS(13,3)
      WTS(13,14)=WTS(13,2)
      WTS(13,15)=WTS(13,1)
      I=NQUAD-2
      DO 10 K=1,NQUAD
      R(K)=RTS(I,K)
   10 W(K)=WTS(I,K)
      RETURN
   20 R(1)=1.00
      W(1)=1.00
      RETURN
      END
      SUBROUTINE INT1(T,N,X,H)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON DUMMY(1310)
      COMMON        H2,H4,H24,RT
      COMMON N2,N3,N4,N5,N6,N7,N8,N9,NN,KFLAG,INDM,IDUM
      DIMENSION T(1)
C
C     ВЫЧИСЛЕНИЕ КОНСТАНТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ПРОГРАММЕ
      NN=N
      N2=N*2
      N3=N*3
      N4=N*4
      N5=N*5
      N6=N*6
      N7=N*7
      N8=N*8
      N9=N*9
      H2=H*0.5
      H4=H2*0.5
      H24=H/24.0
      RT=1./6.
C     ВЫЧИСЛЕНИЕ  Y  ПРИМ ДЛЯ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ
```

```
      CALL DAUX(T,N,X,H)
      DO 1 I=1,N
      N91=I+N9
C      ВРЕМЕННАЯ ПАМЯТЬ ДЛЯ  Y
      N81=I+N8
      NNI=I+NN
      T(N91)=T(I)
C      ПОМЕСТИТЬ Y ПРИМ В N-3 ДЛЯ ИСПОЛЬЗ. В СХЕМЕ АДАМСА-МУЛТОНА (А.М.)
    1 T(N8I)=T(NNI)
      KFLAG=0
      INDM=0
      RETURN
      END
      SUBROUTINE INT2(T,N,X,H)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON DUMMY(1310)
      COMMON          H2,H4,H24,RT
      COMMON N2,N3,N4,N5,N6,N7,N8,N9,NN,KFLAG,INDM,IDUM
      DIMENSION T(1)
C
C   INDM= ФЛАГ ДЛЯ МЕТОДА РУНГЕ-КУТТА (Р.К.).МЕНЬШЕ ИЛИ РАВЕН 3.
C      KFLAG= ФЛАГ ДЛЯ ЗАПОМИНАНИЯ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ
C             ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО МЕТОДУ А.М.
C
C             ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО МЕТОДУ РУНГЕ-КУТТА (6 ШАГОВ С ШАГОМ H/2)
C      ЗАМЕЧАНИЕ - ПРОИЗВЕДЕНЫ ДВА ШАГА ИНТЕГРИРОВАНИЯ
C                 ПО МЕТОДУ РУНГЕ-КУТТА, ПОЭТОМУ РЕЗУЛЬТАТЫ
C                 ПЕЧАТАЮТСЯ С ШАГОМ H
C
      INDM=INDM+1
C
C      ЗАПОМИНАНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ МЕТОДА А.М.
      GO TO (10.11,9),KFLAG
C      ЗАНЕСЕНИЕ Y ПРИМ В  N-2
   10 DO 18 I=1,N
      N71=I+N7.
      NNI=I+NN
   18 T(N7I)=T(NNI)
      GO TO 9
C      ЗАНЕСЕНИЕ Y ПРИМ В  N-1
   11 DO 19 I=1,N
      N61=I+N6
      NNI=I+NN
   19 T(N61)=T(NNI)
    9 CONTINUE
      GO TO 17
C           ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО МЕТОДУ А.М.
```

```
C
C     ЗАНЕСЕНИЕ ТЕКУЩИХ ЗНАЧЕНИЙ Y И Y ПРИМ ВО ВРЕМЕННУЮ ПАМЯТЬ
   12 DO 13 I=1,N
      N9I=I+N9
      N2I=I+N2
      NNI=I+NN
      T(N9I)=T(I)
   13 T(N2I)=T(NNI)
C     ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДСКАЗАНИЯ  Y
      DO 14 I=1,N
      N2I=I+N2
      N6I=I+N6
      N7I=I+N7
      N8I=I+N8
      N9I=I+N9
      YP=T(N9I)+H24*(55.0*T(N2I)-59.0*T(N6I)+37.0*T(N7I)-
         9.0*T(N8I))
C     ЗАНЕСЕНИЕ ПРЕДСКАЗАННОГО ЗНАЧЕНИЯ Y В  X=X+H
   14 T(I)=YP
C     ПРИРАЩЕНИЕ X
      X=X+H
C     ВЫЧИСЛЕНИЕ Y ПРИМ ПО ПРЕДСКАЗАННОМУ ЗНАЧЕНИЮ Y
      CALL DAUX(T,N,X,H)
C     УТОЧНЕНИЕ  Y
      DO 15 I=1,N
      NNI=I+NN
      N2I=I+N2
      N6I=I+N6
      N7I=I+N7
      N9I=I+N9
      YC=T(N9I)+H24*(9.0*T(NNI)+19.0*T(N2I)-5.0*T(N6I)+T(N7I))
C     ЗАПОМИНАНИЕ НОВОГО ТЕКУЩЕГО ЗНАЧЕНИЯ Y
   15 T(I)=YC
C     ВЫЧИСЛЕНИЕ Y ПРИМ ДЛЯ НОВОГО ШАГА
      CALL DAUX(T,N,X,H)
C     ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПАМЯТИ ДЛЯ СТАРЫХ ЗНАЧЕНИЙ  ПРОИЗВОДНЫХ
      DO 16 I=1,N
      N8I=I+N8
      N7I=I+N7
      N6I=I+N6
      N2I=I+N2
C     ЗАПИСЬ. Y ПРИМ (N-2) В (N-3)
      T(N8I)=T(N7I)
      KFLAG=KFLAG+1
      IF(INDM.GO.3)GO TO 12
      DO 9 K=1,2
C           ВЫЧИСЛЕНИЕ K1
```

```
      DO 1 I=1,N
      N2I=I+N2
      NNI=I+NN
    1 T(N2I)=T(NNI)*H2
C             ВЫЧИСЛЕНИЕ K2
C     ПРИРАЩЕНИЕ X
      X=X+H4
      DO 2 I=1,N
      N9I=I+N9
      N2I=I+N2
    2 T(I)=T(N9I)+0.5*T(N2I)
      CALL DAUX(T,N,X,H)
C     ЗАПОМИНАНИЕ K2
      DO 3 I=1,N
      N3I=I+N3
      NNI=I+NN
    3 T(N3I)=T(NNI)*H2
C             ВЫЧИСЛЕНИЕ K3
      DO 4 I=1,N
      N9I=I+N9
      N3I=I+N3
    4 T(I)=T(N9I)+0.5*T(N3I)
      CALL DAUX(T,N,X,H)
C     ЗАПОМИНАНИЕ K3
      DO 5 I=1,N
      N4I=I+N4
      NNI=I+NN
    5 T(N4I)=T(NNI)*H2
C             ВЫЧИСЛЕНИЕ K4
C     ПРИРАЩЕНИЕ X
      X=X+H4
      DO 6 I=1,N
      N9I=I+N9
      N4I=I+N4
    6 T(I)=T(N9I)+T(N4I)
      CALL DAUX(T,N,X,H)
C     ЗАПОМИНАНИЕ K4
      DO 7 I=1,N
      N5I=I+N5
      NNI=I+NN
    7 T(N5I)=T(NNI)*H2
C     ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДСКАЗАНИЯ Y
      DO 8 I=1,N
      N9I=I+N9
      N2I=I+N2
      N3I=I+N3
      N4I=I+N4
```

```
      N5I=I+N5
      Y=T(N9I)+RT*(T(N2I)+2.0*T(N3I)+2.0*T(N4I)+T(N5I))
C     ЗАПОМИНАНИЕ ТЕКУЩЕГО ЗНАЧЕНИЯ Y
      T(I)=Y
C     ЗАНЕСЕНИЕ Y ВО ВРЕМЕННУЮ ПАМЯТЬ
    8 T(N9I)=T(I)
C     ВЫЧИСЛЕНИЕ Y ПРИМ
      CALL DAUX(T,N,X,H)
C     ЗАПИСЬ Y (N-1) В (N-2)
      T(N7I)=T(N6I)
C     ЗАПИСЬ Y ПРИМ (N) В (N-1)
   16 T(N6I)=T(N2I)
   17 RETURN
      END
```

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир»

Дж. Касти, Р. Калаба

МЕТОДЫ ПОГРУЖЕНИЯ
В ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Редактор Г. М. Цукерман
Художник Е. Л. Микеев
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор И. М. Кренделева
Корректор Н. Сизова

Сдано в набор 3/XII 1975 г. Подписано к печати 22/VI 1976 г. Бумага кн.-журн. $84\times108^1/_{16}$ = 3,50 бум. л. 11,76 усл. печ. л., Уч.-изд. л. 9,56. Изд. № 1/8423. Цена 66 к. Зак. 803.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Ярославский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
150014, Ярославль, ул. Свободы, 97.

66 к.

